

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KUBICKÉ GRAFY S MALÝM POČTOM
HRANOVÝCH 3-FARBENÍ
BAKALÁRSKA PRÁCA

2024
NADIYA BALANCHUK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KUBICKÉ GRAFY S MALÝM POČTOM
HRANOVÝCH 3-FARBENÍ

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: Mgr. Jozef Rajník, PhD.

Bratislava, 2024
Nadiya Balanchuk



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Nadiya Balanchuk
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Kubické grafy s malým počtom hranových 3-farbení
Cubic graphs with small number of 3-edge-colourings

Anotácia: Grafy s práve jedným hranovým k -farbením (až na permutáciu farieb) začali skúmať Greenwell a Kronk v roku 1973. Ukázali, že takéto grafy musia byť regulárne. Thomason ukázal, že pre $k > 3$ sú jediné také grafy hviezdy rádu $k + 1$. Jediným relevantným prípadom ostávajú teda 3-regulárne, teda kubické, grafy. Hoci v tomto prípade je známych nekonečne veľa jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľných grafov, iba jediný z nich je cyklicky 4-súvislý. Cieľom tejto práce je rozšíriť skúmanie kubických grafov s jedným hranovým 3-farbením na tie s malým počtom farbení a pri štúdiu malých grafov nájsť, ktoré štruktúry v grafe spôsobujú malý počet hranových 3-farbení.

Cieľ:

1. Pomocou počítačových nástrojov nájsť malé kubické grafy s malým počtom hranových 3-farbení.
2. Analyzovať štruktúru nájdených grafov a matematicky zdôvodniť počet ich hranových 3-farbení nezávisle na počítači
3. Zostrojiť nekonečné triedy grafov s malým počtom hranových 3-farbení.

Vedúci: Mgr. Jozef Rajník, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Dátum zadania: 11.10.2023

Dátum schválenia: 16.10.2023

doc. RNDr. Dana Pardubská, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Podakovanie: Týmto by som chcela podakovať môjmu školiteľovi Mgr. Jozefovi Rajníkovi, PhD. za pomoc, trpezlivosť a cenné rady, ktorými ma počas celej práce viedol. Tiež by som chcela poďakovať mojej rodine za podporu.

Abstrakt

Jednoznačne hranovo 3-zafarbitelné kubické grafy sú predmetom skúmania už desaťročia. Vďaka tomu v tejto oblasti ostali najmä problémy, o ktorých sa domnievame, že sú ťažké. Myslíme si, že výsledky týkajúce sa grafov, ktoré majú namiesto jedného dve farbenia môžu priniesť nový pohľad aj na problémy súvisiace s jednoznačnou hranovou 3-zafarbitelnosťou. V tejto práci skúmame kubické grafy s malým počtom hranových 3-farbení. Prezентujeme konštrukcie nekonečných tried takýchto grafov s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 4 a 5. O grafoch z týchto tried dokazujeme, že skutočne majú práve 2 hranové 3-farbenia. Konštrukcie zakladáme na spájaní izochromatického Petersenovho 4-pólu s inými kubickými 4-pólmi. V práci opisujeme aj graf, ktorý má spomedzi grafov do 26 vrcholov ako jediný obvod 6 a práve 2 hranové 3-farbenia. Okrem toho opisujeme ďalšie malé grafy s práve 2 hranovými 3-farbeniami, ktoré sú medzi skupinou grafov s danou vlastnosťou vzácne.

Kľúčové slová: kubický graf, hranové 3-farbenie, počet hranových 3-farbení

Abstract

Uniquely 3-edge-colorable cubic graphs have been studied for decades. As a result, most of the problems that remain in this area are believed to be hard. We think that results concerning graphs that have two colorings instead of one can provide a new perspective on problems related to unique 3-edge-colorability. In this work, we investigate cubic graphs with a small number of 3-edge-colorings. We present constructions of infinite classes of such graphs with cyclic connectivity 4 and girth 4 and 5. For graphs from these classes, we prove that they indeed have exactly two 3-edge-colorings. These constructions are based on junctions of an isochromatic Petersen 4-pole with other cubic 4-poles. We also describe the graph, which, among graphs with up to 26 vertices, is the only one with girth 6 and exactly two 3-edge-colorings. Furthermore, we describe other small graphs with two 3-edge-colorings that are rare among graphs with certain properties.

Keywords: cubic graph, 3-edge-coloring, number of 3-edge-colorings

Obsah

Úvod	1
1 Definície	3
1.1 Multipóly	4
2 Známe výsledky	7
2.1 Paritná lema	7
2.2 Počet hranových 3-farbení kubického grafu	8
2.3 Jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľné grafy	11
2.4 Farbenie hrán 4-rezu	12
2.5 Izochromatický Petersenov 4-pól	12
3 Nekonečné triedy grafov	15
3.1 Triedy s 2-rezom	15
3.2 Triedy s 3-rezom	16
3.3 Trieda s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 4	16
3.4 Trieda s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 5	20
4 Ostatné grafy	27
4.1 Grafy s obvodom a cyklickou súvislosťou 5 a 6	28
4.2 Odstraňovanie štvoruholníkov	28
Záver	31

Zoznam obrázkov

1.1	Petersenov graf.	3
2.1	Transformácia $\Delta - Y$	9
2.2	2-rez v kubickom grafe G	9
2.3	Grafy G'_1 a G'_2	10
2.4	Trojrez v kubickom grafe G	11
2.5	Modifikácia grafu G na grafy G'_1 a G'_2	11
2.6	Graf $P(9, 2)$	12
2.7	Izochromatický Petersenov 4-pól.	13
2.8	Doplnenie na Petersenov graf.	13
2.9	Petersenov graf.	13
2.10	Farbenie izochromatického Petersenovho 4-pólu typu $(1, 1, 2, 2)$	14
2.11	Farbenie izochromatického Petersenovho 4-pólu typu $(1, 1, 1, 1)$	14
2.12	Iné farbenie izochromatického Petersenovho 4-pólu typu $(1, 1, 2, 2)$	14
3.1	Graf S_3	17
3.2	Graf S'_3	17
3.3	Graf $P * S_3$	19
3.4	Kubický 4-pól D_3	21
3.5	Farbenie 2-pólu D'_2	21
3.6	Dva 5-cykly.	22
3.7	Graf $P * D_3$	24
4.1	Grafy, ktoré sa po odstránení štvoruholníka nedajú doplniť na snark.	28
4.2	Graf s obvodom 6 a cyklickou súvislosťou 6.	29
4.3	Graf s obvodom 5 a cyklickou súvislosťou 5.	29

Zoznam tabuliek

2.1	Vlastnosti hranových 3-farbení izochromatického Petersenovho 4-pólu. . .	14
3.1	Vlastnosti hranových 3-farbení 4-pólov S_k	19
3.2	Vlastnosti hranových 3-farbení 4-pólov D_k	23
4.1	Preskúmané kubické grafy.	27

Úvod

Jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľné grafy sa začali skúmať už v roku 1973 [7]. Thomason [10] v roku 1978 charakterizoval jednoznačne hranovo k -zafarbiteľné grafy pre $k \geq 4$. Ostáva preto zaoberať sa skúmaním jednoznačne hranovo k -zafarbiteľných grafov pre $k \leq 3$. Vďaka rokom výskumu sú nepreskúmanými problémami v oblasti jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľných grafov najmä problémy, o ktorých sa predpokladá, že sú ťažké. V tejto práci sa preto budeme zaoberať grafmi, ktoré nie sú jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľné, ale počet ich hranových 3-farbení je malý. Predmetom nášho záujmu budú hlavne kubické grafy s dvoma hranovými 3-farbeniami.

Je známe, že jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľné kubické grafy súvisia so štruktúrou najmenšieho protipríkladu pre hypotézu o dvojitom pokrytí cyklami [12]. Veríme, že vhlád do štruktúry grafov s dvoma hranovými 3-farbeniami môže priniesť nové poznatky aj v tomto smere.

V roku 2015 Belcastrová a Haasová vo svojom článku prezentovali, že existuje nekonečne veľa jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľných kubických grafov bez trojuholníkov [6]. V našej práci predstavíme niekoľko konštrukcií nekonečných tried kubických grafov s dvoma hranovými 3-farbeniami, ktoré sú taktiež bez trojuholníkov.

V kapitole 1 definujeme základné pojmy, ktoré budeme v našej práci používať. V kapitole 2 uvádzame prehľad známych výsledkov, ktoré pre nás budú dôležité. Ďalej v kapitole 3 predstavíme naše konštrukcie nekonečných tried kubických grafov s dvoma hranovými 3-farbeniami. Najprv predstavíme konštrukcie, ktoré vyplývajú z existencie dvojrezu alebo trojrezu v grafe. Následne sa pozrieme na grafy s cyklickou súvislosťou 4. Tieto konštrukcie sú založené na spájaní 4-pólov, o ktorých ukážeme, že majú vlastnosti, ktoré nám umožňujú konštruovať grafy s dvoma hranovými 3-farbeniami. Nájdeniu týchto konštrukcií predchádzalo skúmanie štruktúry kubických grafov s dvoma hranovými 3-farbeniami. Na toto skúmanie sme použili existujúce aj vlastné počítačové programy, pomocou ktorých sme filtrovali grafy s istými vlastnosťami. Nekonečné triedy, ktoré predstavíme, sa nám podarilo skonštruovať vďaka pozorovaniam, že niektoré z takto nájdených grafov sa dajú rozširovať bez porušenia ich kľúčových vlastností.

Konštrukcie týchto nekonečných tried predstavujú hlavné výsledky tejto práce. Počas výskumu sme objavili aj niekoľko jednotlivých kubických grafov s dvoma hranovými

3-farbeniami, ktoré sú zaujímavé z pohľadu ich vlastností. Medzi tieto vlastnosti patrí napríklad ich obvod. Tieto grafy predstavíme v kapitole 4.

Kapitola 1

Definície

V tejto kapitole definujeme základné pojmy, ktoré budeme v našej práci používať. Niektoré základné pojmy tu nedefinujeme a preberáme ich z práce R. Diestela [3].

V našej práci budeme pod pojmom *graf* rozumieť neorientovaný graf, ktorý môže obsahovať násobné hrany a slučky.

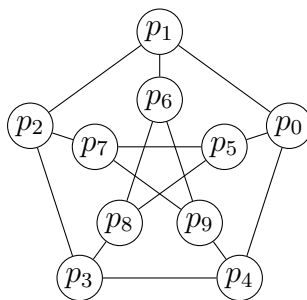
Graf nazývame *k-regulárny*, ak každý jeho vrchol je stupňa *k*. *Kubický graf* je graf, ktorý je 3-regulárny.

Hranové k-farbenie grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $f : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Zobrazenie f priradzuje každej hrane $e \in E$ farbu $f(e)$ tak, že pre každú dvojicu susedných hrán $e_1, e_2 \in E$ platí $f(e_1) \neq f(e_2)$. Neformálne, v hranovom *k*-farbení majú rôzne hrany incidentné s rovnakým vrcholom priradené rôzne farby. V práci budeme používať pojem *farbenie*, ako synonymum pre hranové 3-farbenie. Ak existuje hranové *k*-farbenie grafu G , tak hovoríme, že G je *k-zafarbiteľný*. Na obrázkoch v tejto práci budeme farby 1, 2, 3 značiť farbami červená, zelená a modrá v tomto poradí.

Príkladom kubického grafu, ktorý nie je hranovo 3-zafarbiteľný, je Petersenov graf, ktorý je zobrazený na obrázku 1.1.

V práci budeme spomínať aj snarky. *Snark* je kubický graf bez mostov, ktorý nie je hranovo 3-zafarbiteľný. Príkladom snarku je práve spomínaný Petersenov graf.

Nech $G = (V, E)$ je graf. Farbenia f_1 a f_2 grafu G považujeme za *ekvivalentné*, ak existuje permutácia φ množiny farieb taká, že $f_1(e) = \varphi(f_2(e))$ pre každé $e \in E$.



Obr. 1.1: Petersenov graf.

Neformálne, dve hranové farbenia považujeme za ekvivalentné, ak jedno je permutáciou farieb druhého. Ak o grafe tvrdíme, že má n hranových 3-farbení, myslíme tým iba navzájom neekvivalentné.

Maximálny počet navzájom neekvivalentných hranových 3-farbení grafu G označujeme ako $c(G)$. Ak pre graf G platí, že $c(G) = 1$, tak hovoríme, že graf G je *jednoznačne* hranovo 3-zafarbiteľný.

Prejdime ku definícii pojmu cyklickej súvislosti. Tú preberáme z práce Z. Dvořáka a spol. [8]. *Cyklický hranový rez* grafu G je množina hrán, ktoré keď z G odstránime, tak výsledný graf bude obsahovať aspoň 2 komponenty obsahujúce cyklus. *Cyklická súvislosť* grafu G je veľkosť najmenšieho cyklického hranového rezu.

1.1 Multipóly

V našej práci budeme pracovať aj so štruktúrami známymi ako multipóly. Multipól sa od grafu líši tým, že nie všetky konce jeho hrán musia byť incidentné s nejakým vrcholom. Môže dokonca obsahovať hrany, ktoré nie sú incidentné so žiadnym vrcholom. S multipólmi sa môžeme stretnúť napríklad v prácach [4, 14, 9]. Prejdime teraz ku formálnej definícii multipólu a súvisiacich pojmov. Nasledovné definície sú prebraté z práce J. Rajníka [9].

Multipól je usporiadaná dvojica $M = (V(M), E(M))$, kde $V(M)$ je množina vrcholov a $E(M)$ množina hrán. Každý z dvoch koncov hrany multipólu môže byť incidentný s vrcholom multipólu. Hrana multipólu, ktorej oba konce sú incidentné s vrcholmi, sa nazýva *spojnica*. Ak iba jeden koniec hrany multipólu je incidentný s vrcholom, označíme takú hranu ako *visiaca hrana*. Multipól s k visiacimi hranami nazývame *k-pól*. Ak je visiaca hrana incidentná iba s vrcholom u , budeme na ňu odkazovať ako na hranu $\{u\}$. Pre prehľadnosť zápisu budeme pre túto hranu používať označenie u , ak je z kontextu jasné, že nemyslíme vrchol u . Rôzne hrany, ktoré sú incidentné s tým istým vrcholom, budeme nazývať *susedné*.

Polhrana je koniec visiacej hrany multipólu, ktorý nie je incidentný s vrcholom. Nech (e_1, \dots, e_k) je lineárne usporiadanie polhrán k -pólu M . Potom k -pól M nazývame *usporiadaný* a označujeme ho ako $M(e_1, \dots, e_k)$.

Podobne ako sme definovali farbenie grafu môžeme definovať aj farbenie multipólu. *Hranové k-farbenie* multipólu M je zobrazenie $f: E(M) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ také, že pre susedné hrany $e_1 \neq e_2$ platí $f(e_1) \neq f(e_2)$.

Definujme ďalej typ 3-farbenia pre multipól. Nech $M(e_1, \dots, e_k)$ je k -pól a f je jeho hranové 3-farbenie. Hovoríme, že toto farbenie je *typu* $(g(e_1), \dots, g(e_k))$, kde g je to z farbení ekvivalentných s f , že $(g(e_1), \dots, g(e_k))$ je lexikograficky najmenšie možné.

Nech $i < j$ a e'_i a e'_j sú dve polhrany usporiadaného k -pólu $M(e'_1, \dots, e'_k)$, také

že e'_i je koniec hrany e_i a e'_j je koniec hrany e_j . *Spojenie* polhrán e'_i a e'_j definujeme nasledovným spôsobom.

- Ak $e_i \neq e_j$, tak pridáme novú hranu h a odstránime hrany e_i a e_j . Hrana h bude incidentná s vrcholmi, ktoré boli incidentné s hranami e_i a e_j . Tým vznikne nový $(k - 2)$ -pól $M'(e'_1, \dots, e'_{i-1}, e'_{i+1}, \dots, e'_{j-1}, e'_{j+1}, \dots, e'_k)$.
- Ak $e_i = e_j$, tak e_i je izolovaná hrana, ktorú z M odstránime, čím získame $(k - 2)$ -pól.

Nech $M(e_1, \dots, e_k)$, $N(h_1, \dots, h_k)$ sú dva usporiadané k -póly. *Spojením* týchto k -pólov je graf, ktorý vznikne ich disjunktným zjednotením a spojením polhrán e_i a h_i pre $i \in \{1, \dots, k\}$. Označujeme ho ako $M * N$.

Kapitola 2

Známe výsledky

V tejto kapitole uvidíme niektoré známe výsledky, ktoré sú dôležité pre našu prácu.

2.1 Paritná lema

Viacero dôkazov v oblasti farbení grafov využíva poznatok známy ako paritná lema. Tú sformuloval už v roku 1948 Descartes [2]. Najskôr si dokážeme pomocné tvrdenie, ktoré využijeme v dôkaze samotnej paritnej lemy.

Tvrdenie 2.1. Nech $G = (V, E)$ je kubický graf. G má hranové 3-farbenie práve vtedy, keď G má nikde nulový $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -tok.

Dôkaz. (\Rightarrow) Nech G má hranové 3-farbenie. Existuje bijekcia medzi množinou $\{1, 2, 3\}$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{(0, 0)\}$. Na farby hrán sa teda môžeme pozeráť ako na prvky zo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{(0, 0)\}$. Každý vrchol grafu G je incidentný s tromi hranami, ktoré majú farby $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. V $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ platí, že $(0, 1) + (1, 0) + (1, 1) = (0, 0)$. Teda pre každý vrchol grafu G platí, že súčet farieb hrán s ním incidentných je nulový. Orientácie hrán môžeme zanedbať, pretože v $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ je každý prvok svojím vlastným inverzným prvkom. Takto sme skonštruovali nikde nulový $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -tok k hranovému 3-farbeniu grafu G .

(\Leftarrow) Nech G má nikde nulový $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -tok. Každý vrchol grafu G je incidentný s tromi hranami, ktoré majú hodnoty tokov $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, lebo žiadna iná kombinácia hodnôt zo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ by nebola v súčte nulová. Tento tok je hranovým 3-farbením grafu G farbami $(0, 1)$, $(1, 0)$ a $(1, 1)$. Prvky $(0, 1)$, $(1, 0)$ a $(1, 1)$ z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ budú zodpovedať farbám 1, 2 a 3 v hranovom 3-farbení. \square

Paritná lema hovorí, že ak má kubický graf hranové 3-farbenie, tak pre každý hranový rez platí, že počet hrán rezu zafarbených tou istou farbou je párny alebo nepárny podľa toho, či je veľkosť rezu párna alebo nepárna. Znenie paritnej lemy je nasledovné.

Lema 2.2. (*Paritná lema*) Nech G je kubický graf. Ak G má hranové 3-farbenie $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$, tak pre každý hranový rez T platí $|T \cap f^{-1}(i)| \equiv |T| \pmod{2}$ pre všetky $i \in \{1, 2, 3\}$.

Dôkaz. Ak G má hranové 3-farbenie, tak z tvrdenia 2.1 vyplýva existencia nikde nulového $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -toku. V nikde nulovom toku pre každý hranový rez platí, že súčet tokov hrán na tomto reze je nulový. Ak teda označíme $n_i = |f^{-1}(i) \cap T|$, tak pre hranový rez T musí platiť $n_1 \cdot (0, 1) + n_2 \cdot (1, 0) + n_3 \cdot (1, 1) = (0, 0)$. Z toho $n_2 + n_3 \equiv 0 \pmod{2}$ a tiež $n_1 + n_3 \equiv 0 \pmod{2}$. Potom ale $n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \pmod{2}$. Rovnaká parita tu znamená aj to, že $n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv |T| \pmod{2}$, čiže $|T \cap f^{-1}(i)| \equiv |T| \pmod{2}$ pre všetky $i \in \{1, 2, 3\}$. \square

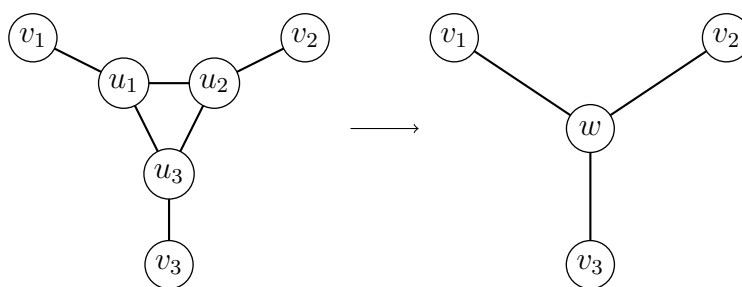
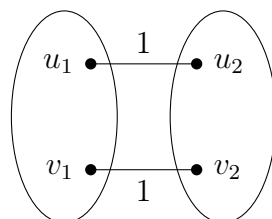
2.2 Počet hranových 3-farbení kubického grafu

Počet hranových 3-farbení kubického grafu závisí od jeho štruktúry. Preto sa postupne pozrieme na niektoré vlastnosti kubických grafov a na to, aký vplyv majú tieto vlastnosti na počet hranových 3-farbení. Na tieto výsledky nadviažeme v kapitole 3, kde skonštruujeme nekonečné triedy grafov s dvoma hranovými 3-farbeniami.

Tvrdenie 2.3. Nech G je kubický graf obsahujúci most. Potom G nemá hranové 3-farbenie.

Dôkaz. Nech by graf G mal hranové 3-farbenie. Potom hrana, ktorá je mostom, a teda tvorí 1-rez v tomto grafe, musí mať priradenú nejakú farbu. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že táto hrana je zafarbená farbou 1. Nech a_i je počet hrán v tomto 1-reze, ktoré majú v tomto farbení priradenú farbu i pre všetky $i \in \mathbb{Z}_3$. O počte hrán zafarbených farbou 1 v tomto 1-reze vieme, že $a_1 \equiv 1 \pmod{2}$. Zvyšné farby sme nepoužili, takže $a_2 \equiv a_3 \equiv 0 \pmod{2}$. Teda $a_1 \not\equiv a_2 \equiv a_3 \pmod{2}$, čo je spor s paritnou lemov. \square

Z tvrdenia 2.3 vyplýva, že kubické grafy obsahujúce most pre nás nebudú zaujímavé. Okrem toho pre nás nebudú zaujímavé ani grafy obsahujúce trojuholník. To je kvôli vlastnostiam transformácií známych ako $\Delta - Y$ a $Y - \Delta$. Aplikáciou týchto transformácií na kubický graf sa počet jeho hranových 3-farbení nezmení. Popíšme teraz, v čom tieto transformácie spočívajú. Nech $u_1 u_2 u_3$ je trojuholník v kubickom grafe G . Nech u_i je okrem vrcholov trojuholníka susedný ešte s vrcholom v_i pre všetky $i \in \{1, 2, 3\}$. Vykonanie $\Delta - Y$ transformácie spočíva v odstránení vrcholov u_1, u_2, u_3 z grafu G spolu s hranami s nimi incidentnými a následnom pridaní nového vrchola w a hrán wv_1, wv_2 a wv_3 , ako je znázornené na obrázku 2.1. Transformácia $Y - \Delta$ je, neformálne, opačnou operáciou ku $\Delta - Y$. Transformácia $\Delta - Y$ z trojuholníka vytvorí vrchol a transformácia $Y - \Delta$ vymení vrchol za trojuholník.

Obr. 2.1: Transformácia $\Delta - Y$.Obr. 2.2: 2-rez v kubickom grafe G .

Prejdime teraz ku známym tvrdeniam o počte hranových 3-farbení kubických grafov skonštruovateľných spojením dvoch 2-pólov, alebo dvoch 3-pólov. Tieto ukázali Belcastrová a Haasová [5].

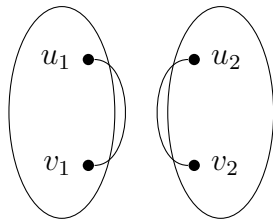
Tvrdenie 2.4. Nech G je kubický graf obsahujúci 2-rez pozostávajúci z hrán u_1u_2 , v_1v_2 . Nech tento 2-rez rozdeľuje graf G na grafy G_1 a G_2 . Nech $G'_1 = G_1 \cup u_1v_1$ a $c(G'_1) = a$. Nech $G'_2 = G_2 \cup u_2v_2$ a $c(G'_2) = b$. Potom $c(G) = 2ab$.

Dôkaz. Pozrime sa na to, aké farby môžu mať hrany 2-rezu v nejakom hranovom 3-farbení. Nech a_i je počet hrán v tomto 2-reze, ktoré majú v tomto farbení priradenú farbu i pre všetky $i \in \{1, 2, 3\}$. Z paritnej lemy musí platiť $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv 2 \pmod{2}$. Z toho je zjavné, že obe hrany daného 2-rezu musia mať v ľubovoľnom 3-farbení rovnakú farbu. Totiž, ak by tieto dve hrany mali priradené rôzne farby, tak by pre niektoré z a_i platilo $a_i = 1 \not\equiv 0 \pmod{2}$, čo by bolo v spore s paritnou lemov.

Teraz vyjadrime počet hranových 3-farbení grafu G pomocou počtov hranových 3-farbení grafov G'_1 a G'_2 . Grafy G'_1 a G'_2 sú zjavne kubické, pretože sme predpokladali, že G bol kubický. Situácia je zobrazená na obrázku 2.3.

Predpokladáme, že $c(G'_1) = a$ a $c(G'_2) = b$. Koľko hranových 3-farbení má G ? Stačí nám obmedziť sa na farbenia, v ktorých majú hrany $u_i v_i$ farbu 1. Situácia je zobrazená na obrázku 2.2. Z takto zafarbených grafov G'_1 a G'_2 totiž vieme priamočiaro vytvoriť farbenie grafu G tak, že z grafov G'_1 a G'_2 odstránime hrany $u_i v_i$ zafarbené farbou 1 a pridáme hrany $u_1 u_2$, $v_1 v_2$, taktiež zafarbené farbou 1.

Ak graf G'_1 zafarbíme ľubovoľným z jeho a neekvivalentných hranových 3-farbení a graf G'_2 zafarbíme ľubovoľným z jeho b neekvivalentných hranových 3-farbení, spojenie

Obr. 2.3: Grafy G'_1 a G'_2 .

týchto dvoch zafarbených grafov do grafu G vyššie popísaným spôsobom vedie ku validnému hranovému 3-farbeniu grafu G . Graf G ale nebude mať ab hranových 3-farbení. Zoberme dve ekvivalentné hranové 3-farbenia grafu G'_2 . Ku každému z takto ekvivalentne zafarbených dvoch grafov G'_2 môžeme pripojiť ľubovoľne, až na farbu hrany u_1v_1 zafarbený graf G'_1 vyššie popísaným spôsobom. Tým dostaneme dva rôzne zafarbené grafy G . Takto získané farbenia však už nie sú ekvivalentné. Z toho je už ľahko vidieť, že celkový počet hranových 3-farbení grafu G je $2ab$. \square

Dôsledkom tvrdenia 2.4 je aj to, že aplikácie $\Delta - Y$ a $Y - \Delta$ transformácií nemenia počet hranových 3-farbení grafu.

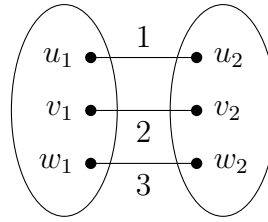
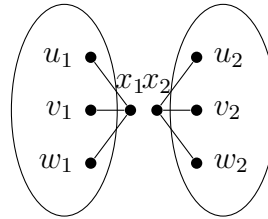
Pre grafy obsahujúce 3-rez ukážeme podobné tvrdenie ako pre grafy obsahujúce 2-rez. Obidve tieto tvrdenia nám dávajú návod na konštrukciu nekonečných tried kubických grafov s dvoma hranovými 3-farbeniami, na ktoré sa pozrieme v kapitole 3. Toto tvrdenie pochádza z práce Belcastrovej a Haasovej [5].

Tvrdenie 2.5. Nech G je kubický graf obsahujúci 3-rez pozostávajúci z hrán u_1u_2 , v_1v_2 , w_1w_2 . Nech tento 3-rez rozdeľuje graf G na grafy G_1 , G_2 . Nech $G'_1 = G_1 \cup u_1x_1 \cup v_1x_1 \cup w_1x_1$ a $c(G'_1) = a$. Nech $G'_2 = G_2 \cup u_2x_2 \cup v_2x_2 \cup w_2x_2$ a $c(G'_2) = b$. Potom $c(G) = ab$.

Dôkaz. Pozrime sa na možné farby hrán trojrezu v nejakom hranovom 3-farbení. Nech a_i je počet hrán v tomto trojreze, ktoré majú v tomto farbení priradenú farbu i pre všetky $i \in \{1, 2, 3\}$. Z paritnej lemy musí platiť $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv 3 \pmod{2}$. Keďže $3 \equiv 1 \pmod{2}$. Odtiaľ vidíme, že hrany trojrezu musia mať v ľubovoľnom 3-farbení rôzne farby. Totiž, ak by dve hrany mali priradené rovnaké farby, tak by pre niektoré z a_i platilo $a_i = 2 \not\equiv 1 \pmod{2}$, čo by bolo v spore s paritnou lemov. Ak by mali tri hrany priradené rovnaké farby, tak by pre niektoré z a_i platilo $a_i = 0 \not\equiv 1 \pmod{2}$, čo by bolo tiež v spore s paritnou lemov.

Grafy G'_1 a G'_2 sú zjavne kubické, pretože sme predpokladali, že G bol kubický. Schématické zobrazenie týchto grafov je na obrázku 2.5.

Ak graf G'_1 zafarbíme ľubovoľným z jeho a neekvivalentných hranových 3-farbení a graf G'_2 zafarbíme ľubovoľným z jeho b neekvivalentných hranových 3-farbení, tak farbenie grafu G vieme vytvoriť tak, že pre toto dané farbenie grafu G'_2 spermutujeme

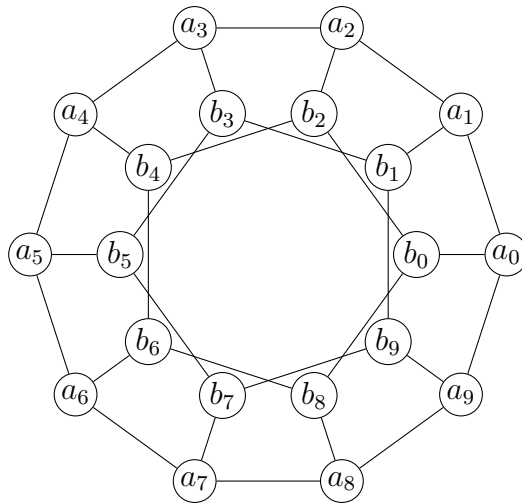
Obr. 2.4: Trojrez v kubickom grafe G .Obr. 2.5: Modifikácia grafu G na grafy G'_1 a G'_2 .

farby tak, aby hrany u_2x_2 , v_2x_2 , w_2x_2 mali farby po dvojiciach rovnaké ako hrany u_1x_1 , v_1x_1 , w_1x_1 . Následne tieto dva grafy spojíme do grafu G tak, že hrany u_1x_1 , v_1x_1 , w_1x_1 a u_2x_2 , v_2x_2 , w_2x_2 odstránime a pridáme hrany u_1u_2 , v_1v_2 , w_1w_2 zafarbené rovnako ako hrany u_1x_1 , v_1x_1 , w_1x_1 . Každé z b hranových 3-farbení grafu G'_2 môžeme takto spárovať s každým z a hranových 3-farbení grafu G'_1 . Ak by sme zvolili inú permutáciu farieb v grafe G'_2 , tak by sme ho nevedeli napojiť na graf G'_1 . Preto celkový počet hranových 3-farbení grafu G je ab .

□

2.3 Jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľné grafy

Jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľné kubické grafy sú skúmané už desaťročia, vďaka čomu poznáme nekonečné triedy takýchto grafov. Najprv však boli známe iba graf K_4 a grafy, ktoré z K_4 dostaneme operáciou $Y - \Delta$. To viedlo k domnienke, že každý jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľný graf je planárny a obsahuje trojuholník. Fiorini a Wilson [11] dokázali, že táto domnienka je nesprávna. Graf $P(9, 2)$ (viď obrázok 2.6), ktorý našli, je jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľný, neobsahuje trojuholník a nie je planárny. Na základe grafu $P(9, 2)$ neskôr Belcastrová a Haasová skonštruovali nekonečnú triedu jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľných kubických grafov bez trojuholníkov [6]. Pri konštrukcii tejto nekonečnej triedy využili tvrdenie 2.5. Všetky známe jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľné kubické grafy ale majú cyklickú súvislosť nanaajvyš 3, okrem grafu $P(9, 2)$, ktorý má cyklickú súvislosť 5.

Obr. 2.6: Graf $P(9, 2)$.

2.4 Farbenie hrán 4-rezu

Jednoduchým rozborom prípadov podľa paritnej lemy je ľahké dokázať nasledujúce tvrdenie o farbení hrán 4-rezu.

Tvrdenie 2.6. Nech G je kubický graf obsahujúci 4-rez. Potom hrany tohto 4-rezu majú v každom hranovom 3-farbení jedno z nasledujúcich priradení farieb: $(1, 2, 1, 2)$, $(1, 2, 2, 1)$, $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$.

2.5 Izochromatický Petersenov 4-pól

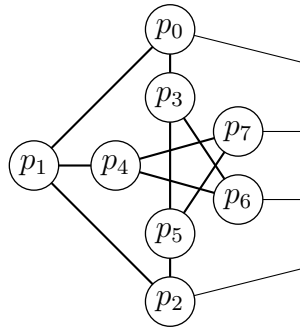
V tejto časti sa pozrieme na vlastnosti konkrétneho 4-pólu a určíme, ako vieme zafarbiť jeho visiace hrany. Tieto poznatky nám pomôžu pri konštrukcii nekonečných tried kubických grafov s dvoma hranovými 3-farbeniami.

Graf na obrázku 2.7 je známy ako izochromatický Petersenov 4-pól. Pod pojmom izochromatický Petersenov 4-pól budeme rozumieť usporiadaný izochromatický Petersenov 4-pól s poradím visiacych hrán p_0, p_7, p_6, p_2 . Tento 4-pól budeme v tejto práci označovať P .

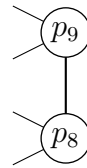
Nasledovné výsledky o izochromatickom Petersenovom 4-póle pochádzajú z práce Chladného a Škovieru [14].

Tvrdenie 2.7. Existuje práve jedno 3-farbenie izochromatického Petersenovho 4-pólu typu $(1, 1, 1, 1)$ a práve dve 3-farbenia typu $(1, 1, 2, 2)$. Farbenie žiadneho iného typu neexistuje.

Dôkaz. Z tvrdenia 2.6 vieme, že každé hranové 3-farbenie je jedného z typov $(1, 2, 1, 2)$, $(1, 2, 2, 1)$, $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$. Sporom ukážeme, že farbenie typu $(1, 2, 1, 2)$



Obr. 2.7: Izochromatický Petersenov 4-pól.



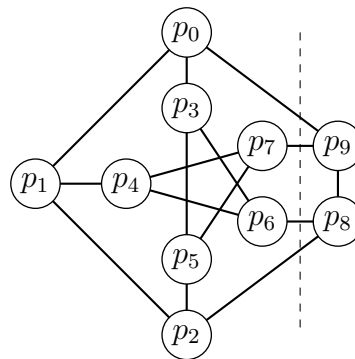
Obr. 2.8: Doplnenie na Petersenov graf.

a $(1, 2, 2, 1)$ nie je v prípade izochromatického Petersenovho 4-pólu možné.

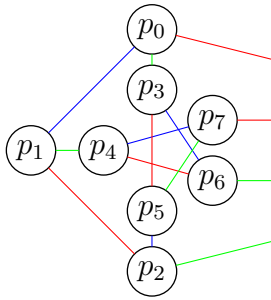
Nech by existovalo farbenie typu $(1, 2, 1, 2)$, alebo $(1, 2, 2, 1)$. Izochromatický Petersenov 4-pól vieme doplniť na Petersenov graf pridaním 4-pólu z obrázku 2.8.

Ak je vzniknutý 4-rez zafarbený farbami $(1, 2, 1, 2)$, alebo $(1, 2, 2, 1)$, tak hranu medzi vrcholmi p_8 a p_9 vieme ofarbiť farbou 3. V predpokladoch tvrdenia máme, že zvyšok izochromatického Petersenovho 4-pólu vieme zafarbiť. Z toho vyplýva, že sme našli hranové 3-farbenie pre Petersenov graf, čo je v spore s tým, že tento graf nie je hranovo 3-zafarbiteľný. Preto izochromatický Petersenov 4-pól nemá hranové 3-farbenie typu $(1, 2, 1, 2)$, ani typu $(1, 2, 2, 1)$.

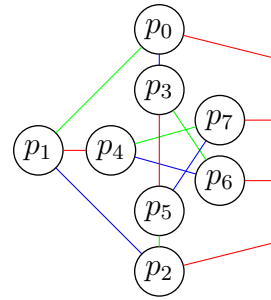
Prevereníím všetkých možností ľahko overíme, že farbenie typu $(1, 1, 1, 1)$ je jediné. Toto farbenie je zobrazené na obrázku 2.11. Rovnako aj v prípade farbenia typu $(1, 1, 2, 2)$ preveríme všetky možnosti a zistíme, že existujú práve dve farbenia tohto typu.



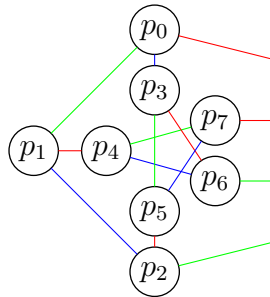
Obr. 2.9: Petersenov graf.



Obr. 2.10: Farbenie izochromatického Petersenovho 4-pólu typu $(1, 1, 2, 2)$.



Obr. 2.11: Farbenie izochromatického Petersenovho 4-pólu typu $(1, 1, 1, 1)$.



Obr. 2.12: Iné farbenie izochromatického Petersenovho 4-pólu typu $(1, 1, 2, 2)$.

Tieto farbenia sú zobrazené na obrázkoch 2.10 a 2.12. Farby 1, 2 a 3 sú zobrazené červenou, zelenou a modrou farbou v tomto poradí. \square

Pre lepšiu prehľadnosť si zhrnieme poznatky o izochromatickom Petersenovom 4-póle v tabuľke 2.1.

Typ farbenia	Počet hranových 3-farbení
$(1, 1, 1, 1)$	1
$(1, 1, 2, 2)$	2
$(1, 2, 2, 1)$	0
$(1, 2, 1, 2)$	0

Tabuľka 2.1: Vlastnosti hranových 3-farbení izochromatického Petersenovho 4-pólu.

Kapitola 3

Nekonečné triedy grafov

V tejto kapitole sa pozrieme na niektoré nekonečné triedy kubických grafov, ktoré majú práve dve hranové 3-farbenia. Úvodné sekcie 3.1 a 3.2 obsahujú konštrukcie, ktoré nie sú našimi výsledkami. Jedná sa iba o priame dôsledky známych tvrdení. V ďalších sekciách ale predstavíme naše konštrukcie nekonečných tried kubických grafov s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 4 a 5 s práve dvoma hranovými 3-farbeniami. Tieto konštrukcie predstavujú hlavný prínos tejto práce.

3.1 Triedy s 2-rezom

Z tvrdenia 2.4 môžeme ľahko vidieť, že aby mal kubický graf G obsahujúci 2-rez práve dve hranové 3-farbenia, musia byť podgrafy G'_1 a G'_2 z obrázku 2.3 jednoznačne hranovo 3-zafarbitelné.

Toto pozorovanie nám dáva návod na konštrukciu nekonečnej triedy kubických grafov s práve dvomi hranovými 3-farbeniami. Potrebujeme na to iba nekonečnú triedu jednoznačne 3-zafarbitelných kubických grafov. Z nich môžeme vybrať ľubovoľné dva, nie nutne rôzne, grafy a spojiť ich 2-rezom. Spojenie 2-rezom znamená, že v jednom grafe si zvolíme ľubovoľnú hranu u_1v_1 , v druhom grafe si zvolíme ľubovoľnú hranu u_2v_2 a tieto hrany odstránime a namiesto nich pridáme hranu u_1u_2 a v_1v_2 . Jednoznačne 3-zafarbitelné grafy boli a sú predmetom rozsiahlejšieho skúmania, vďaka čomu sú nekonečné triedy takýchto grafov známe. Jednu z takýchto tried popísali napríklad Belcastrová a Haasová [6].

Okrem toho z tvrdenia 2.4 vyplýva aj to, že kubický graf obsahujúci 2-rez musí mať párný počet hranových 3-farbení.

3.2 Triedy s 3-rezom

Z tvrdenia 2.5 vyplýva, že pre kubický graf obsahujúci 3-rez s dvoma hranovými 3-farbeniami musí platiť, že jeden z grafov G'_1 a G'_2 z obrázku 2.5 musí byť jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľný a druhý musí mať dve hranové 3-farbenia.

Aj táto skutočnosť nám dáva návod na konštrukciu nekonečnej triedy kubických grafov s práve 2 hranovými 3-farbeniami. Stačí zobrať ľubovoľný kubický graf, ktorý je jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľný a spojiť ho s kubickým grafom s dvoma hranovými 3-farbeniami. Týmto dvom grafom odtrhneme po jednom vrchole a tieto dva 3-póly spojíme. Takto získaný graf bude mať podľa tvrdenia 2.5 dve hranové 3-farbenia.

Tieto konštrukcie sú však jednoduchou zmenou známych tried kubických grafov. Preto sú pre nás zaujímavé kubické grafy, ktoré majú cyklickú súvislosť 4. Ďalej sa budeme venovať práve takýmto grafom.

3.3 Trieda s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 4

V tejto časti zostrojíme nekonečnú triedu kubických grafov s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 4, ktoré majú práve dve hranové 3-farbenia. Z cyklickej súvislosti 4 vyplýva existencia 4-rezu. Budeme preto hľadať rôzne 4-póly, ktoré budeme po dvoch spájať. Zaujímajú nás také dvojice 4-pólov, že z počtu ich hranových 3-farbení budeme vedieť určiť počet farbení výsledného grafu. Jedným z vhodných 4-pólov môže byť izochromatický Petersenov 4-pól, ktorý sme predstavili v kapitole 2. V tejto sekcii predstavíme novú konštrukciu 4-pólov, ktoré budú vhodné pre naše účely. Nazývame ich S_k .

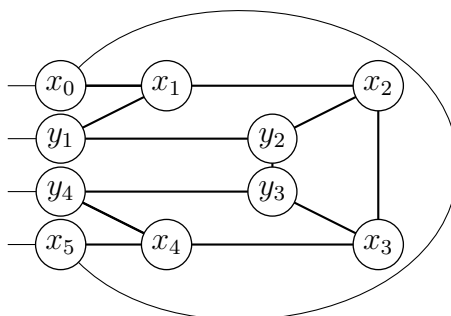
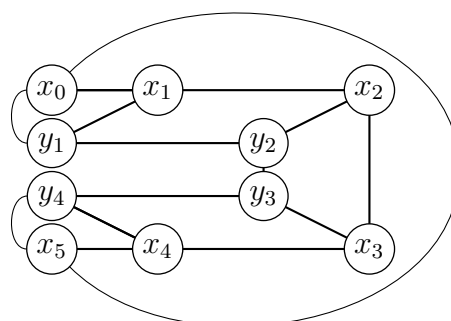
Kubický 4-pól S_k skonštruujeme nasledovným spôsobom. Zoberieme dve cesty P_X a P_Y . Cesta P_X bude mať dĺžku $k + 2$ a cesta P_Y bude mať dĺžku k . Prvý vrchol cesty P_X označíme x_0 a posledný vrchol x_{k+2} . Vrcholy cesty P_Y označíme y_1, \dots, y_{k+1} . Korešpondujúce vrcholy ciest P_X a P_Y , teda x_i, y_i , spojíme. Vrcholy x_0 a x_{k+2} tiež spojíme hranou. Na záver pripojíme visiace hrany k vrcholom x_0, y_1, x_{k+2} a y_k , vďaka čomu bude S_k kubickým 4-pólom. Nákres 4-pólu S_3 je na obrázku 3.1.

Formálne je S_k kubický 4-pól pozostávajúci z množiny $V = \{x_0, \dots, x_{k+2}, y_1, \dots, y_{k+1}\}$, a množiny $E = \{x_i x_{i+1} \mid i \in \{0, \dots, k+1\}\} \cup \{y_i y_{i+1} \mid i \in \{1, \dots, k+1\}\} \cup \{x_i y_i \mid i \in \{1, \dots, k+1\}\} \cup \{x_0 x_{k+2}\} \cup \{x_0, y_1, x_{k+2}, y_{k+1}\}$.

S týmto 4-pólom budeme pracovať, ako s usporiadaným 4-pólom, kde visiace hrany budú usporiadané v poradí x_0, y_1, y_k, x_{k+2} . Teda pod 4-pólom S_k budeme rozumieť 4-pól $S_k(x_0, y_1, y_k, x_{k+2})$.

Bude pre nás užitočné vedieť sa odkazovať na štvoruholníky 4-pólu S_k .

Definícia 3.1. Štvoruholník $x_i x_{i+1} y_{i+1} y_i$ pre $i \in \{1, \dots, k\}$ nazývame *i-tým štvoruholníkom* 4-pólu S_k . Hrany $x_i y_i$ a $x_{i+1} y_{i+1}$ sa nazývajú *vnútorné hrany i-teho štvoruholníka*.

Obr. 3.1: Graf S_3 .Obr. 3.2: Graf S'_3 .

uholníka. Hrana $y_i y_{i+1}$ sa nazýva *spodná hrana* i -teho štvoruholníka. Hrana $x_i x_{i+1}$ sa nazýva *vrchná hrana* i -teho štvoruholníka.

Niekedy pre nás bude výhodné pozerať na graf S'_k namiesto 4-pólu S_k . Graf S'_k vznikne z 4-pólu S_k tak, že pridáme hrany $x_0 y_1$ a $x_{k+2} y_k$ a odstránime visiace hrany. Príklad modifikácie 4-pólu S_3 na graf S'_3 je zobrazený na obrázku 3.2.

Tvrdenie 3.2. Pre každé kladné nepárne k existuje jediné hranové 3-farbenie f 4-pólu S_k typu $(1, 1, 1, 1)$.

Dôkaz. Ukážme najskôr existenciu. Visiace hrany x_0 a y_1 ofarbíme farbou 1. Hranu $x_0 x_{k+2}$ ofarbíme farbou 3. Na ceste x_0, \dots, x_{k+2} sa budú striedať farby 2 a 1 v tomto poradí. Na ceste y_1, \dots, y_{k+1} sa taktiež budú striedať farby 2 a 1 v tomto poradí. Všetky hrany $x_i y_i$ pre $i \in \{1, \dots, k+1\}$ budú mať farbu 3. Takto skonštruované farbenie je validným 3-farbením k -pólu S_k .

Ukážme teraz jednoznačnosť. Je ľahké vidieť, že ak existuje m neekvivalentných 3-farbení k -pólu S_k typu $(1, 1, 1, 1)$, tak existuje aj m neekvivalentných farbení k -pólu

S_k typu $(1, 1, 1, 1)$, kde hrana x_0x_{k+2} má farbu 3. Tiež je ľahké vidieť, že ku každému 3-farbeniu typu $(1, 1, 1, 1)$ k -pólu S_k existuje práve jedno farbenie grafu S'_k , ktoré má hrany x_0y_1 a $x_{k+1}y_{k+1}$ ofarbené farbou 1 a naopak. Preto stačí ukázať, že 3-farbenie grafu S'_k , ktoré má hrany x_0y_1 a $x_{k+1}y_{k+1}$ ofarbené farbou 1 je jednoznačné. Keďže S'_k je graf, môžeme naň aplikovať paritnú lemu. Pozrime sa na 3-rez tvorený hranami x_0x_{k+2} , x_ix_{i+1} a y_iy_{i+1} pre ľubovoľné prípustné i . Z paritnej lemy a ofarbenia hrany x_0x_{k+2} farbou 3 vyplýva, že hrany x_ix_{i+1} a y_iy_{i+1} musia mať farby 1 a 2 v nejakom poradí. Z predchádzajúceho faktu a ofarbenia hrany x_0y_1 farbou 1 vidno, že na ceste x_0, \dots, x_{k+2} sa musia striedať farby 2 a 1 v tomto poradí a na ceste y_1, \dots, y_{k+1} sa musia striedať farby 1 a 2 v tomto poradí. To ale jednoznačne určuje aj farby hrán x_iy_i , ktoré všetky musia mať farbu 3. \square

Tvrdenie 3.3. Pre žiadne kladné nepárne k neexistuje hranové 3-farbenie 4-pólu S_k typu $(1, 1, 2, 2)$.

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že existuje hranové 3-farbenie f 4-pólu S_k typu $(1, 1, 2, 2)$ pre nejaké kladné nepárne k . Potom v tomto farbení hrana x_0x_{k+2} musí byť zafarbená farbou 3.

Farbenie 4-pólu S_k typu $(1, 1, 2, 2)$ modifikujeme na farbenie f' grafu S'_k tak, že $f'(x_0y_1) = f(y_1)$ a $f'(x_{k+2}y_k) = f(y_k)$ a ostatné hrany sú zafarbené rovnako ako v f .

Označme i -ty štvoruholník v grafe S'_k ako T_i pre $i \in \{1, \dots, k\}$. Z paritnej lemy vyplýva, že v každom hranovom 3-farbení musia byť x_0x_{k+2} , vrchná hrana T_i a spodná hrana T_i zafarbené rôznymi farbami, lebo tvoria 3-rez v grafe S'_k . Keďže hrana x_0x_{k+2} je zafarbená farbou 3, tak vrchná a spodná hrana štvoruholníka T_i musia byť zafarbené farbami 1 a 2, alebo 2 a 1 v tomto poradí. Ak existuje farbenie 4-pólu S_k typu $(1, 1, 2, 2)$, vrchná hrana $x_{i+1}x_{i+2}$ štvoruholníka T_{i+1} musí byť zafarbená farbou $f(y_iy_{i+1})$ a spodná hrana $y_{i+1}y_{i+2}$ štvoruholníka T_{i+1} musí byť zafarbená farbou $f(x_ix_{i+1})$. Preto na ceste y_1, \dots, y_{k+1} sa musia striedať farby 1 a 2. Hrana y_1y_2 v tomto type farbenia musí byť zafarbená farbou 2, pretože visiaca hrana z vrcholu y_1 má byť zafarbená farbou 1. Preto posledná hrana y_ky_{k+1} na ceste y_1, \dots, y_{k+1} musí byť zafarbená farbou 2, čo je spor s tým, že visiaca hrana z vrcholu y_{k+1} má mať farbu 2. \square

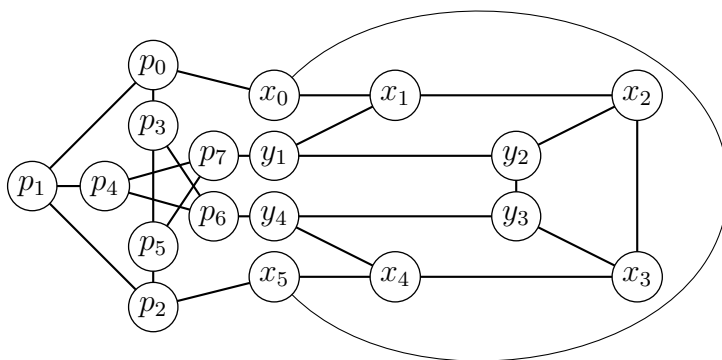
Tvrdenie 3.4. Pre každé párne $k > 0$ existuje jediné hranové 3-farbenie 4-pólu S_k typu $(1, 1, 2, 2)$.

Dôkaz. Dôkaz je analogický dôkazu tvrdenia 3.2. \square

Tvrdenie 3.5. Pre žiadne párne k neexistuje hranové 3-farbenie 4-pólu S_k typu $(1, 1, 1, 1)$.

Dôkaz. Dôkaz je analogický dôkazu tvrdenia 3.3. \square

Typ farbenia	Parita k	Počet farbení
(1, 1, 1, 1)	nepárne	1
(1, 1, 1, 1)	párne	0
(1, 1, 2, 2)	nepárne	0
(1, 1, 2, 2)	párne	1

Tabuľka 3.1: Vlastnosti hranových 3-farbení 4-pólov S_k .Obr. 3.3: Graf $P * S_3$.

V tabuľke 3.1 zhrnieme vlastnosti hranových 3-farbení 4-pólov S_k

Teraz sa pozrieme na nekonečnú triedu kubických cyklicky štvorsúvislých grafov s práve dvoma hranovými 3-farbeniami a obvodom 4. Najprv si túto triedu definujeme a následne ukážeme, že má tieto vlastnosti. Do tejto triedy patria všetky grafy $P * S_k$, kde P je izochromatický Petersenov 4-pól.

Na obrázku 3.3 je príklad grafu z tejto triedy, ktorý vznikne spojením 4-pólu S_3 a izochromatického Petersenovho 4-pólu.

Veta 3.6. Pre všetky kladné k platí, že graf $P * S_k$ je kubický cyklicky 4-súvislý s obvodom 4 a má práve dve hranové 3-farbenia.

Dôkaz. Skutočnosť, že graf $P * S_k$ je kubický, cyklicky štvorsúvislý s obvodom 4 je zrejmá. Dokážeme, že graf $P * S_k$ má práve dve hranové 3-farbenia. Rozoberieme dva prípady, kedy je k nepárne a kedy je k párne.

Pre nepárne k z tvrdenia 3.2 vieme, že existuje farbenie 4-pólu S_k typu (1, 1, 1, 1). Tiež z tvrdenia 3.3 vieme, že žiadne farbenie 4-pólu S_k nemôže byť typu (1, 1, 2, 2).

Pre Petersenov 4-pól vieme, že existujú farbenia typu (1, 1, 2, 2), alebo (1, 1, 1, 1) z tvrdenia 2.7. Farbenie izochromatického Petersenovho 4-pólu žiadneho iného typu neexistuje.

Z toho vyplýva, že 4-rez rozdeľujúci graf $P * S_k$ na 4-pól S_k a izochromatický Petersenov 4-pól môže byť zafarbený iba farbami $(1, 1, 1, 1)$. Z tvrdenia 3.2 vyplýva, že existuje jediné 3-farbenie 4-pólu S_k typu $(1, 1, 1, 1)$. Rovnako existuje jediné 3-farbenie izochromatického Petersenovho 4-pólu typu $(1, 1, 1, 1)$ z tvrdenia 2.7. Graf $P * S_k$ bude mať práve dve hranové 3-farbenia. Tie vzniknú tak, že najprv ofarbíme 4-rez farbami $(1, 1, 1, 1)$ a potom jednoznačne dofarbíme 4-pól S_k . Pre izochromatický Petersenov 4-pól pri dofarbovaní vieme spermutovať farby 2 a 3, čím získame dve rôzne farbenia grafu $P * S_k$.

Pre párne k z tvrdenia 3.5 vieme, že neexistuje 3-farbenie 4-pólu S_k typu $(1, 1, 1, 1)$. Tiež z tvrdenia 3.4 vieme, že existuje farbenie 4-pólu S_k typu $(1, 1, 2, 2)$.

Keď spojíme poznatky o typoch farbení izochromatického Petersenovho 4-pólu s poznatkami o typoch farbení S_k , dostaneme, že 4-rez rozdeľujúci graf $P * S_k$ na 4-pól S_k a izochromatický Petersenov 4-pól môže byť zafarbený iba farbami $(1, 1, 2, 2)$. Z tvrdenia 3.4 vyplýva, že existuje jediné 3-farbenie grafu S_k typu $(1, 1, 2, 2)$. Izochromatický Petersenov 4-pól má práve dve hranové 3-farbenia typu $(1, 1, 2, 2)$, ako sme ukázali v tvrdení 2.7. Graf $P * S_k$ bude mať práve dve hranové 3-farbenia. Tie vzniknú tak, že najprv ofarbíme 4-rez farbami $(1, 1, 2, 2)$ a potom jednoznačne dofarbíme 4-pól S_k . V tomto prípade nevieme spermutovať farby 2 a 3, pretože sú jednoznačne určené farbami visiach hrán izochromatického Petersenovho 4-pólu. Následne dofarbíme izochromatický Petersenov 4-pól, jedným z dvoch spôsobov. \square

3.4 Trieda s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 5

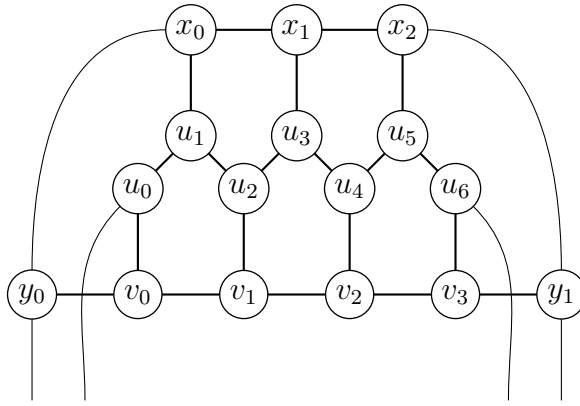
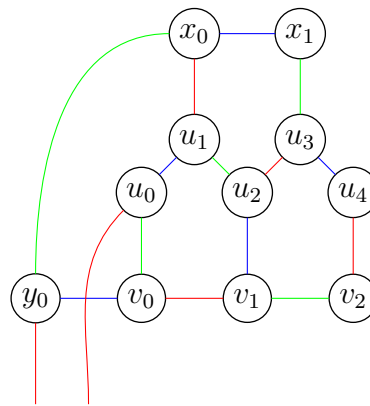
V tejto časti sa pozrieme na 4-póly, pomocou ktorých následne zostrojíme nekonečnú triedu kubických grafov s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 5.

Rovnako ako v predošlej sekcii, na konštrukciu nekonečnej triedy bude pre nás dôležitý izochromatický Petersenov 4-pól. Tiež budeme využívať 4-pól D_k , ktorý teraz definujeme. Opíšme ho ale najskôr neformálne. Na to nám pomôže obrázok 3.4. Parameter k hovorí o počte „domčekov“, ktoré pozostávajú z 5-cyklov v spodnej časti 4-pólu D_k . Z D_k je možné vyrobiť D_{k+1} pridaním dvoch 5-cyklov, ktoré sú na obrázku 3.6.

Definícia 3.7. Kubický 4-pól $D_k = (V(D_k), E(D_k))$, kde

- $V(D_k) = \{v_i \mid i \in \{0, 1, \dots, k\}\} \cup \{u_i \mid i \in \{0, 1, \dots, 2k\}\} \cup \{x_i \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \{y_0, y_1\}$
- $E(D_k) = \{v_i v_{i+1} \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \{u_i u_{i+1} \mid i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}\} \cup \{x_i x_{i+1} \mid i \in \{0, 1, \dots, k-2\}\} \cup \{v_i u_{2i} \mid i \in \{0, \dots, k\}\} \cup \{x_i u_{2i+1} \mid i \in \{0, \dots, k-1\}\} \cup \{v_0 y_0, v_k y_1, x_0 y_0, x_{k-1} y_1\} \cup \{u_0, y_0, u_{2k}, y_1\}$

Pod 4-pólom D_k budeme rozumieť usporiadaný 4-pól $D_k(y_0, u_0, u_{2k}, y_1)$.

Obr. 3.4: Kubický 4-pól D_3 .Obr. 3.5: Farbenie 2-pólu D'_2 .

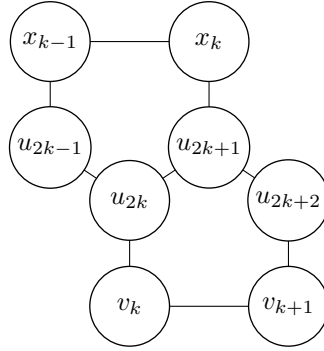
Definujme 2-pól D'_k , ktorý vznikne z D_k odstránením vrcholu y_1 , hrán $v_k y_1$ a $x_{k-1} y_1$ a dvoch visiacych hrán z vrcholov u_{2k} a y_1 . Na obrázku 3.5 je príklad farbenia 2-pólu D'_2 .

Tvrdenie 3.8. Nech $k \geq 2$. Nech f je 3-farbenie 2-pólu D'_k farbami z množiny $\{a, b, c\}$, kde $f(y_0) = f(u_0) = a$ a $f(y_0 x_0) = b$. Potom

$$f(x_{k-1} x_{k-2}), f(u_{2k-1} u_{2k-2}), f(v_k v_{k-1}) = \begin{cases} a, b, c, & \text{ak } k \equiv 0 \pmod{3} \\ b, c, a, & \text{ak } k \equiv 1 \pmod{3} \\ c, a, b, & \text{ak } k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

a f je jednoznačne určené.

Dôkaz. Matematickou indukciou. Ľahko overíme, že, pre $k = 2$ je farbenie 2-pólu D'_2 s predfarbením $f(y_0) = f(u_0) = a$ a $f(y_0 x_0) = b$ jednoznačne určené. V tomto jednoznačne určenom farbení platí, že $f(x_1 x_0) = c$, $f(u_3 u_2) = a$ a $f(v_2 v_1) = b$. Toto farbenie je na obrázku 3.5, kde farby a, b, c sú zobrazené farbami červená, zelená a modrá.



Obr. 3.6: Dva 5-cykly.

Z 2-pólu D'_k dostaneme 2-pól D'_{k+1} pridaním dvoch 5-cyklov. Táto konštrukcia je zobrazená na obrázku 3.6.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké k a ukážme, že potom platí aj pre $k + 1$. Rozoberieme 3 prípady.

1. $k \equiv 0 \pmod{3}$:

Z indukčného predpokladu vieme, že $f(x_{k-1}x_{k-2})$, $f(u_{2k-1}u_{2k-2})$, $f(v_kv_{k-1}) = a$, b , c . Z toho sú jednoznačne určené farby hrán $f(x_kx_{k-1})$, $f(u_{2k}u_{2k-1})$, $f(v_{k+1}v_k) = b$, c , a . Keďže v tomto prípade $k + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, tak tvrdenie platí.

2. $k \equiv 1 \pmod{3}$:

Z indukčného predpokladu vieme, že $f(x_{k-1}x_{k-2})$, $f(u_{2k-1}u_{2k-2})$, $f(v_kv_{k-1}) = b$, c , a . Z toho sú jednoznačne určené farby hrán $f(x_kx_{k-1})$, $f(u_{2k}u_{2k-1})$, $f(v_{k+1}v_k) = c$, a , b . Keďže v tomto prípade $k + 1 \equiv 2 \pmod{3}$, tak tvrdenie platí.

3. $k \equiv 2 \pmod{3}$:

Z indukčného predpokladu vieme, že $f(x_{k-1}x_{k-2})$, $f(u_{2k-1}u_{2k-2})$, $f(v_kv_{k-1}) = c$, a , b . Z toho sú jednoznačne určené farby hrán $f(x_kx_{k-1})$, $f(u_{2k}u_{2k-1})$, $f(v_{k+1}v_k) = a$, b , c . Keďže v tomto prípade $k + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, tak tvrdenie platí.

Ukázali sme, že tvrdenie platí pre všetky prípustné k , čím je dôkaz ukončený. \square

Tvrdenie 3.8 má niekoľko pre nás užitočných dôsledkov. Pri ich dôkazoch je dôležité si uvedomiť, že 4-pól D_k má oproti 2-pólu D'_k iba 1 vrchol a 4 hrany navyše. Z farbenia 2-pólu D'_k budeme vedieť jednoznačne dofarbiť 4-pól D_k .

Dôsledok 3.9. Pre každé $k \geq 2$, také, že $k \equiv 0 \pmod{3}$ existuje práve jedno 3-farbenie 4-pólu D_k typu $(1, 1, 2, 2)$ a neexistuje žiadne 3-farbenie typu $(1, 1, 1, 1)$.

Dôkaz. Ak za farby a , b , c zvolíme 1 , 3 , 2 , tak z tvrdenia 3.8 vyplýva, že v 2-póle D'_k platí $f(x_{k-1}x_{k-2}) = 1$, $f(u_{2k-1}u_{2k-2}) = 3$ a $f(v_kv_{k-1}) = 2$. Z toho musí platiť aj $f(x_{k-1}u_{2k-1}) = 2$, $f(u_{2k}u_{2k-1}) = 1$, $f(u_{2k}v_k) = 3$. Aplikujme toto farbenie na D_k

Typ farbenia	$k \pmod{3}$	Počet farbení
(1, 1, 1, 1)	0	0
(1, 1, 2, 2)	0	1
(1, 1, 1, 1)	1	1
(1, 1, 2, 2)	1	0
(1, 1, 1, 1)	2	0
(1, 1, 2, 2)	2	1

Tabuľka 3.2: Vlastnosti hranových 3-farbení 4-pólov D_k .

a rozšírime ho tak, aby ofarbovalo celý 4-pól. Je jednoznačne určené $f(x_{k-1}y_1) = 3$, $f(v_k y_1) = 1$. Tým ostali už iba dve visiace hrany, ktoré majú jednoznačne určené $f(u_{2k}) = 2$, $f(y_1) = 2$. Jednoznačné farbenie 2-pólu D'_k sme rozšírili na jednoznačné farbenie 4-pólu D_k typu (1, 1, 2, 2).

Jedinou inou možnosťou, ako je možné dosiahnuť farbenie typu (1, 1, x , y) pre ľubovoľné x , y , je zvoliť za farby a , b , c postupne 1, 2, 3. Rovnakým postupom ako v prípade predchádzajúcej voľby by sme pre rozšírené farbenie f dostali $f(u_{2k}) = 3$, $f(y_1) = 3$. To znova nie je farbenie typu (1, 1, 1, 1), z čoho môžeme uzavrieť že farbenie typu (1, 1, 1, 1) v tomto prípade neexistuje. \square

Dôsledok 3.10. Pre každé $k \geq 2$, také, že $k \equiv 1 \pmod{3}$ existuje práve jedno 3-farbenie 4-pólu D_k typu (1, 1, 1, 1) a neexistuje žiadne 3-farbenie typu (1, 1, 2, 2).

Dôkaz. Môžeme postupovať analogicky, ako v dôkaze dôsledku 3.9. Za farby a , b , c tentoraz zvolíme najskôr farby 1, 2, 3 a potom 1, 3, 2. V oboch prípadoch dostaneme, že v rozšírenom farbení f platí $f(u_{2k}) = 1$, $f(y_1) = 1$, čo je farbenie typu (1, 1, 1, 1). Nejedná sa o rôzne farbenia, pretože ide iba o permutáciu farieb. Toto farbenie typu (1, 1, 1, 1) je teda jednoznačné. Okrem toho sme ukázali, že žiadne farbenie typu (1, 1, 2, 2) tu neexistuje. \square

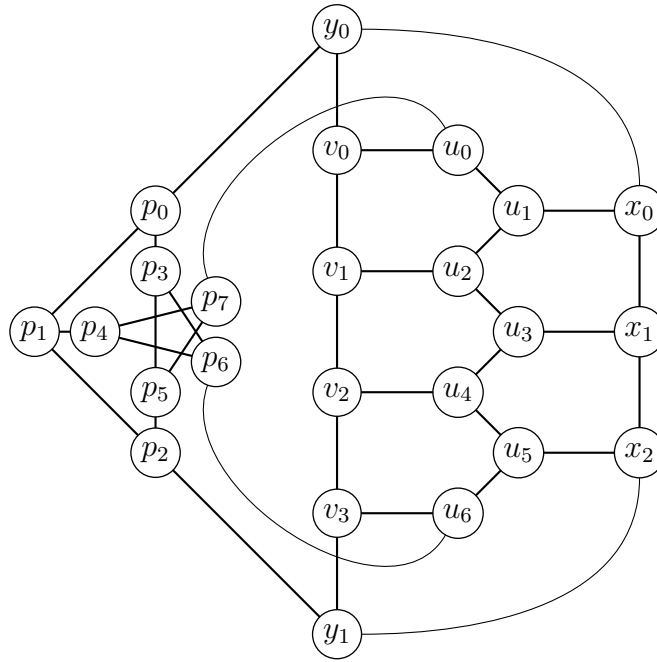
Dôsledok 3.11. Pre každé $k \geq 2$, také, že $k \equiv 2 \pmod{3}$ existuje práve jedno 3-farbenie 4-pólu D_k typu (1, 1, 2, 2) a neexistuje žiadne 3-farbenie typu (1, 1, 1, 1).

Dôkaz. Analogicky ako v prípade dôkazu dôsledku 3.10. \square

V tabuľke 3.2 zhrnieme vlastnosti hranových 3-farbení 4-pólov D_k .

Ďalej sa pozrieme na triedu grafov, ktoré vzniknú spojením 4-pólu D_k a izochromatického Petersenovho 4-pólu. Pôjde teda o triedu grafov $P * D_k$. Ukážeme, že tieto grafy majú práve dve hranové 3-farbenia a sú cyklicky štvorsúvislé s obvodom 5.

Obrázok 3.7 zobrazuje graf $P * D_3$.

Obr. 3.7: Graf $P * D_3$.

Veta 3.12. Pre všetky $k \geq 2$ je graf $P * D_k$ cyklicky 4-súvislý s obvodom 5 a má práve dve hranové 3-farbenia.

Dôkaz. To, že $P * D_k$ je cyklicky 4-súvislý a má obvod 5 je zrejmé z jeho konštrukcie. Dokážeme, že graf $P * D_k$ má práve dve hranové 3-farbenia. Pozrieme sa na dva 4-póly, spojením ktorých graf $P * D_k$ vznikne.

Podľa tvrdenia 2.7 má izochromatický Petersenov 4-pól hranové 3-farbenia typu $(1, 1, 1, 1)$ a $(1, 1, 2, 2)$ a nemá žiadne hranové 3-farbenie iného typu.

Ak $k \bmod 3 = 0$, tak 4-pól D_k má práve jedno 3-farbenie typu $(1, 1, 2, 2)$ a nemá 3-farbenie typu $(1, 1, 1, 1)$. V tomto prípade spoločným typom 3-farbenia oboch 4-pólov je $(1, 1, 2, 2)$. Z dôsledku 3.9 vyplýva, že 4-pól D_k má práve jedno 3-farbenie typu $(1, 1, 2, 2)$. Z tvrdenia 2.7 vyplýva, že izochromatický Petersenov 4-pól má práve dve 3-farbenia typu $(1, 1, 2, 2)$. Máme jeden spôsob, ako zafarbiť podgraf D_k a dva spôsoby, ako zafarbiť podgraf izochromatického Petersenovho 4-pólu. Teda graf $P * D_k$ má práve dve hranové 3-farbenia.

Ak $k \bmod 3 = 1$, tak 4-pól D_k má práve jedno 3-farbenie typu $(1, 1, 1, 1)$ a nemá 3-farbenie typu $(1, 1, 2, 2)$, podľa dôsledku 3.10. S izochromatickým Petersenovým 4-pólom má spoločné 3-farbenie typu $(1, 1, 1, 1)$. Z tvrdenia 2.7 vyplýva, že izochromatický Petersenov 4-pól má práve jedno 3-farbenie typu $(1, 1, 1, 1)$. Máme jeden spôsob, ako zafarbiť podgraf D_k a jeden spôsob, ako zafarbiť podgraf izochromatického Petersenovho 4-pólu. Keďže v tomto type 3-farbenia farby 2 a 3 nie sú zafixované, tak môžeme spermutovať farby 2 a 3 v jednom z podgrafov a získať druhé 3-farbenie grafu

$P * D_k$.

Ak $k \bmod 3 = 2$, tak 4-pól D_k má práve jedno 3-farbenie typu $(1, 1, 2, 2)$ a nemá 3-farbenie typu $(1, 1, 1, 1)$, podľa tvrdenia 3.11. Z tvrdenia 2.7 vyplýva, že izochromatický Petersenov 4-pól má práve dve 3-farbenia typu $(1, 1, 2, 2)$. Spoločným typom 3-farbenia oboch 4-pólov je $(1, 1, 2, 2)$. Máme jeden spôsob, ako zafarbiť podgraf D_k a dva spôsoby, ako zafarbiť podgraf izochromatického Petersenovho 4-pólu. Preto graf $P * D_k$ má práve dve hranové 3-farbenia. \square

Kapitola 4

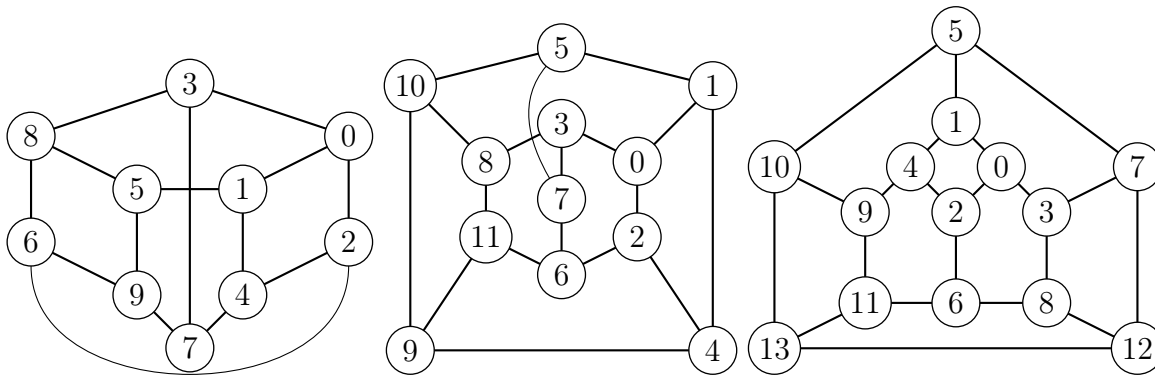
Ostatné grafy

V tejto práci sme pracovali s kubickými grafmi z databázy *House of Graphs* [1]. Z týchto grafov sme pomocou počítačových programov filtrovali grafy s rôznymi vlastnosťami, akými sú napríklad konkrétna cyklická súvislosť, alebo počet hranových 3-farbení. Zaujímavé grafy medzi vyfiltrovanými sme následne študovali manuálne. Na základe týchto experimentov sme odhalili niekoľko grafov, ktorých štruktúru bolo možné použiť na konštrukciu nekonečných tried popísaných v kapitole 3. V tabuľke 4.1 uvádzame počet a vlastnosti grafov, ktoré sme preskúmali. Na určovanie počtu hranových 3-farbení sme použili program z bakalárskej práce M. Zubčáka [13].

Počas skúmania týchto grafov sme objavili niekoľko, ktoré sú vzhľadom na ich vlastnosti vzácne, no nepodarilo sa nám na základe ich štruktúry skonštruovať ďalšie nekonečné triedy grafov s práve dvoma hranovými 3-farbeniami. V tejto kapitole sa budeme venovať práve týmto grafom, pretože ich považujeme za hodné ďalšieho výskumu.

Obvod \geq	Počet vrcholov \leq	Počet grafov	Počet grafov s 2 farbeniami
3	20	556 471	17 702
4	22	1 542 004	125
5	22	97 237	9
6	26	189 225	1
7	32	30 939	0
8	42	4 510	0

Tabuľka 4.1: Preskúmané kubické grafy.



Obr. 4.1: Grafy, ktoré sa po odstránení štvoruholníka nedajú doplniť na snark.

4.1 Grafy s obvodom a cyklickou súvislosťou 5 a 6

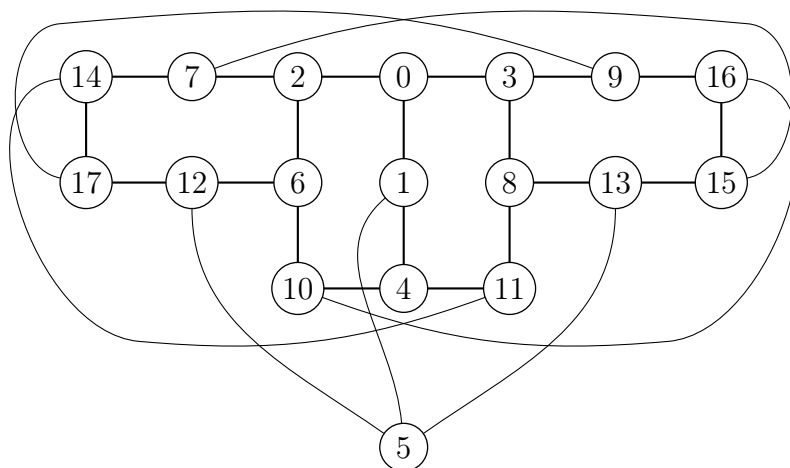
Medzi grafmi do 26 vrcholov je jediný graf, ktorý má práve dve hranové 3-farbenia a obvod 6. Okrem toho má tento graf cyklickú súvislosť 6. Je znázornený na obrázku 4.2. Tento graf má 18 vrcholov a je symetrický. Jedno z jeho dvoch hranových 3-farbení je symetrickým otočením druhého.

Ďalším zaujímavým grafom je graf znázornený na obrázku 4.3. Tento graf má obvod 5 a cyklickú súvislosť 5. Má 16 vrcholov a tak ako v prípade predchádzajúceho grafu je jedno z jeho dvoch hranových 3-farbení symetrickým otočením druhého.

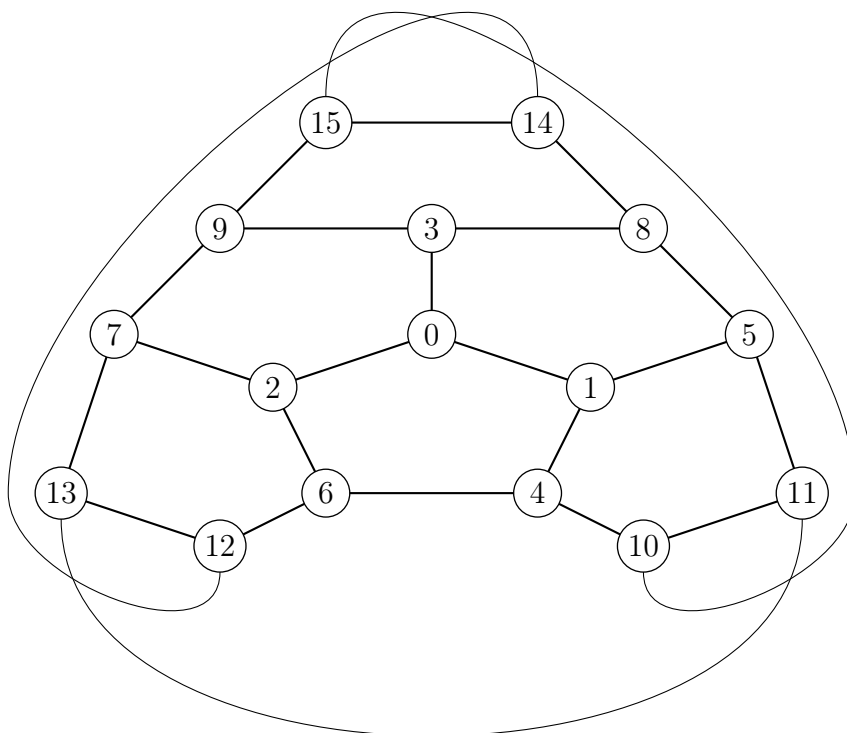
Zaujímavou otázkou je, či existuje nekonečne veľa grafov s vlastnosťami ako grafy na obrázkoch 4.2 a 4.3. My sme nenašli spôsob, ako využiť štruktúru týchto grafov na konštrukciu nekonečných tried grafov s týmito vlastnosťami.

4.2 Odstraňovanie štvoruholníkov

Na grafoch s obvodom 4, cyklickou súvislosťou 4, s počtom vrcholov do 20 a práve dvoma hranovými 3-farbeniami sme skúmali, či je možné odstrániť štvoruholník a takto modifikovaný graf doplniť na snark pomocou žiadneho, alebo dvoch nových vrcholov a niekoľkých hrán. Postačujúcousť skúšania dopĺňania nanajvýš dvoch vrcholov pre doplnenie na snark je jedným z výsledkov práce Chladného a Škovieru [14]. Naším cieľom bolo zistiť, či sú kubické grafy s práve 2 hranovými 3-farbeniami a cyklickou súvislosťou 4 štruktúrne podobné snarkom. V našich konštrukciách nekonečných tried grafov s 2 hranovými 3-farbeniami z kapitoly 3 sa vyskytuje izochromatický Petersenov 4-pól. Tieto experimenty sme vykonali pomocou vlastného počítačového programu. Celkovo sme pracovali s 51 grafmi, teda so všetkými grafmi do 20 vrcholov s požadovanými vlastnosťami. Našli sme medzi nimi 3, ktoré po odstránení žiadneho štvoruholníka nebolo možné takýmto spôsobom doplniť na snark. To znamená, že takmer všetky skúmané grafy s práve dvoma hranovými 3-farbeniami majú svojou štruktúrou veľmi blízko



Obr. 4.2: Graf s obvodom 6 a cyklickou súvislosťou 6.



Obr. 4.3: Graf s obvodom 5 a cyklickou súvislosťou 5.

ku snarkom. Na obrázku 4.1 sú znázornené tri grafy, ktoré sa spomínaným spôsobom nedajú po odstránení štvoruholníka doplniť na snark.

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali kubickými grafmi s malým počtom hranových 3-farbení. Najväčšiu pozornosť sme venovali grafom s práve dvoma hranovými 3-farbeniami. Už pred našim výskumom boli známe nekonečné triedy takýchto grafov. Tieto však obsahovali dvojrez, či trojrez. Nám sa podarilo nájsť nekonečnú triedu spomínaných grafov s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 4 a tiež nekonečnú triedu takýchto grafov s cyklickou súvislosťou 4 a obvodom 5. Toto je v kontraste s poznatkami o jednoznačne hranovo 3-zafarbitelných kubických grafoch. Všetky známe totiž majú cyklickú súvislosť 3, až na graf $P(9, 2)$, ktorý je cyklicky 5-súvislý. Nám sa podarilo skonštruovať nekonečné triedy s cyklickou súvislosťou 4 a práve 2 hranovými 3-farbeniami. Konštrukcie grafov z oboch týchto tried sú založené na spájaní izochromatického Petersenovho 4-pólu s inými 4-pólmi, ktorých konštrukciu v práci opisujeme. O oboch týchto triedach sme aj dokázali, že skutočne majú práve dve hranové 3-farbenia.

Počas skúmania sme narazili na množstvo rôznych grafov s práve dvoma hranovými 3-farbeniami. Práve na štruktúre niektorých z nich sú založené naše nekonečné triedy. Domnievame sa preto, že existuje viacero iných možností, ako nekonečné triedy s požadovanými vlastnosťami skonštruovať. Podarilo sa nám objaviť napríklad kubický graf na 16 vrchoch s cyklickou súvislosťou 5, ktorý má práve 2 hranové 3-farbenia, alebo kubický graf na 18 vrchoch s cyklickou súvislosťou 6, ktorý má taktiež práve 2 hranové 3-farbenia. Skúmanie toho, ako takéto grafy využiť na konštrukcie ďalších nekonečných tried s inými vlastnosťami preto môže byť zaujímavým smerom pre ďalší výskum. Cyklická súvislosť 6 nájdeného grafu s 2 hranovými 3-farbeniami je taktiež v kontraste s poznatkami o jednoznačne zafarbitelných kubických grafoch. Domnievame sa preto, že naše výsledky môžu byť užitočné aj pri štúdiu jednoznačne hranovo 3-zafarbitelných grafov.

Literatúra

- [1] House of graphs, 2024. [Citované 24.5.2024] Dostupné na <https://houseofgraphs.org/meta-directory/cubic>.
- [2] B. Descartes. Network-colourings. *The Math. Gazette*, (32), 1948.
- [3] R. Diestel. *Graph Theory: 5th edition*. Springer Graduate Texts in Mathematics. 2017.
- [4] M. A. Fiol. A boolean algebra approach to the construction of snarks. 01 2011.
- [5] S-M. Belcastro, R. Haas. Counting edge-kempe-equivalence classes for 3-edge-colored cubic graphs. *Discrete Mathematics*, 325:77–84, 2014.
- [6] S-M. Belcastro, R. Haas. Triangle-free uniquely 3-edge colorable cubic graphs. *Contributions to Discrete Mathematics*, 10(2):39–44, 2015.
- [7] D. L. Greenwell, H. V. Kronk. Uniquely line colorable graphs. *Canadian Mathematical Bulletin*, 16(525-529), 1973.
- [8] Z. Dvořák, J. Kára, D. Král', O. Pangrác. An algorithm for cyclic edge connectivity of cubic graphs. In Torben Hagerup and Jyrki Katajainen, editors, *Algorithm Theory - SWAT 2004*, pages 236–247, Berlin, Heidelberg, 2004. Springer Berlin Heidelberg.
- [9] J. Rajník. Farbenia kubických grafov bodovo-blokovými konfiguráciami, 2020.
- [10] A. G. Thomason. Hamiltonian cycles and uniquely edge colourable graphs. *Annals of discrete mathematics*, 3:259–268, 1978.
- [11] S. Fiorini, R. Wilson. Edge colourings of graphs. *Selected Topics in Graph Theory*, 1998.
- [12] C. Zhang. Hamiltonian weights and unique 3-edge-colorings of cubic graphs. *Journal of Graph Theory*, 20(1):91–99, 1995.
- [13] M. Zubčák. Potláčania hrán v kubických grafoch, 2022.

- [14] M. Chladný, M. Škoviera. Factorisation of snarks. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17(R32), 2010.