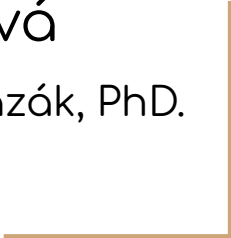




Minimálne nezafarbitel'né podgrafy snarkov

Emma Baďurová

školiteľ: doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.



Definície

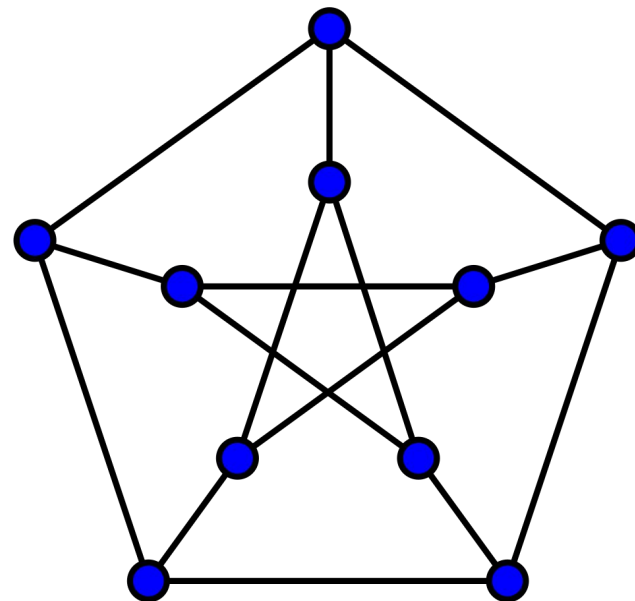
Základné definície

CHROMATICKÝ INDEX

Najmenší počet farieb potrebných na zafarbenie hrán grafu (proper edge-coloring).

SNARK

Minimálny, cyklicky 4-hranovo súvislý, kubický graf s chromatickým indexom 4 a najmenším obvodom (girth) 5.

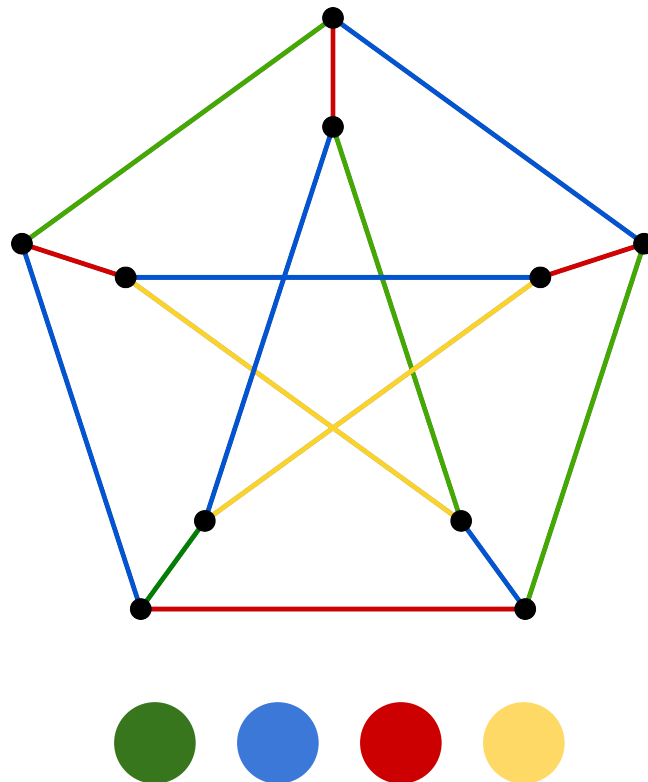


(NE)ZAFARBITEĽNÝ

V našom kontexte je to 3-hranovo
(ne)zafarbiteľný.

MINIMÁLNY (hranovo-kritický)

Graf, ktorý sa odobratím ľubovoľnej
hrany stane zafarbiteľným.

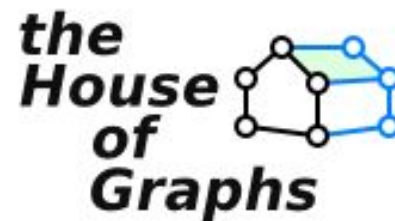


Zoznamy grafov

Databáza grafov

ONLINE DATABÁZA GRAFOV (HOUSE OF GRAPHS)

- grafy na stiahnutie,
- rozdelenie podľa rôznych kritérií,
- obsahuje aj kubické grafy a snarky



Search graphs ^

Require a specific (numeric) value for an invariant

Select invariant... | equal to

+ ×

Require a (numeric) value of an invariant to be in a given range

Select invariant... | between and ×

+ ×

Snarks

All numbers up to 32 vertices were independently verified by [minibaum](#) and [snarkhunter](#). The graphs with more than 32 vertices were generated with [snarkhunter](#). Several conjectures were refuted by these new lists of snarks (see [\[1\]](#) and [\[2\]](#) for more information).

For snarks with 38 vertices and snarks with girth 6 and 40 vertices only a sample was generated as it is currently computationally infeasible to generate the complete lists in these cases (see [\[3\]](#) for more information). The counts of these incomplete cases are indicated with a 'z' in the table. In all other cases the numbers are the counts of the complete sets of snarks.

Vertices	Girth ≥ 4	Girth ≥ 5	Girth ≥ 6	Girth ≥ 7	$\lambda_c \geq 5$
10	1	1	0	0	1
12	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0
18	2	2	0	0	0
20	6	6	0	0	1
22	31	20	0	0	2
24	155	38	0	0	2
26	1297	280	0	0	10
28	12517	2900	1	0	75
30	139054	28399	1	0	509
32	1764950	293059	0	0	2953
34	25286953	3833587	0	0	19935
36	404899916	60167732	1	0	180612
38	?	≥ 19775768	39	0	≥ 35429
40	?	?	≥ 25	0	?
42	?	?	?	0	?

Predošlá práca

CORES OF UNCOLORABLE CUBIC GRAPHS (TOMÁŠ VICIAN, 2018)

- podobný cieľ
- slabšie výsledky

Vertex number	amount of graphs
2	1
4	3
6	15
8	74
10	436

Table 4.1: Basic generation of small snarks

Vertex number of original graphs	amount of cores
2	0
4	1
6	6

Table 4.2: Generating cores

Motivácia a ciele



Práce a výsledky



Generovací algoritmus a spracovanie dát

GENEROVACÍ ALGORITMUS

- postupné odoberanie hrán,
- kontrola minimality a nezafarbiteľnosti,
- ukladanie neizomorfných podgrafov (ba-graph)
- iný algoritmus: pridávanie vrcholov stupňa 2 do hrán

súbory	riadky
10	2400

ANALÝZA A SPRACOVANIE DÁT

- každá tabuľka = vlastná funkcia

SAMOTNÉ GENEROVANIE

- 3 hodiny 22 minút čistého času (iba pre reálne výsledky)

Výsledky práce

3 kategórie:

- vygenerované podgrafy
- tabuľky s vypočítanými vlastnosťami
- objavenie 3 typov podgrafov pre flower snarky

Vygenerované podgrafy

KUBICKÉ GRAFY (girth ≥ 5)

# vertices	10	12	14	16	18	20
# graphs	1	2	9	49	455	5783
# colorable graphs	0	2	9	49	452	5769
# subgraphs	1	0	0	0	11	76
Time [min]	0	0	0	0	0	16

Table 4.1: Statistics for cubic graphs ($g \geq 5$)

# all graphs	6299
# all colorable graphs	6281
# all subgraphs	84
Time sum [min]	16.5798

Table 4.2: Total numbers for cubic graphs ($g \geq 5$)

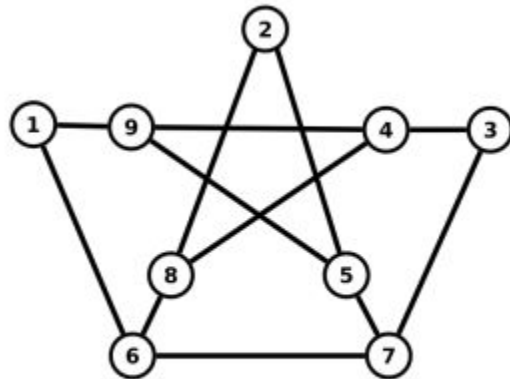


Figure 4.1: Minimal uncolorable subgraph of the Petersen graph

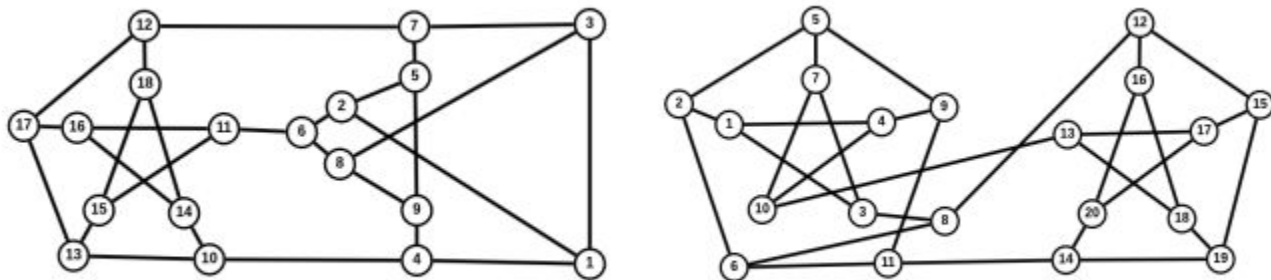


Figure 4.2: Graphs containing the Petersen subgraph

SNARKY (girth ≥ 5)

# vertices	10	18	20	22	24	26
# graphs	1	2	6	20	38	280
# subgraphs	1	10	55	189	471	3853
Time [min]	0	0	0	0	7	154

Table 4.10: Statistics for snarks ($g \geq 5$)

# all graphs	347
# all subgraphs	4525
Time sum [h]	2.703049444

Table 4.11: Total numbers for snarks ($g \geq 5$)

SNARKY (girth ≥ 4)

# vertices	10	18	20	22	24
# graphs	1	2	6	31	155
# subgraphs	1	10	55	323	2031
Time [min]	0	0	0	1	21

Table 4.25: Statistics for snarks ($g \geq 4$)

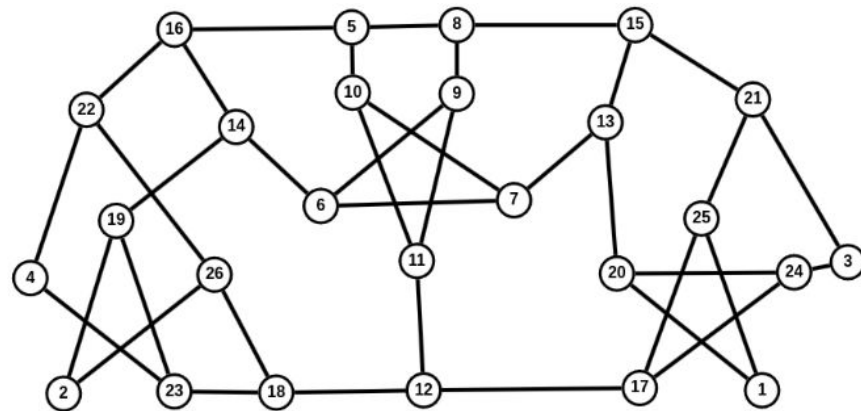
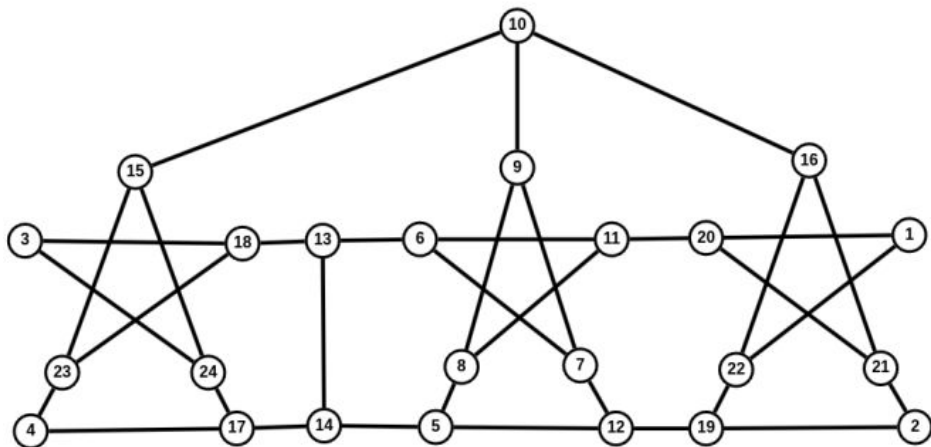
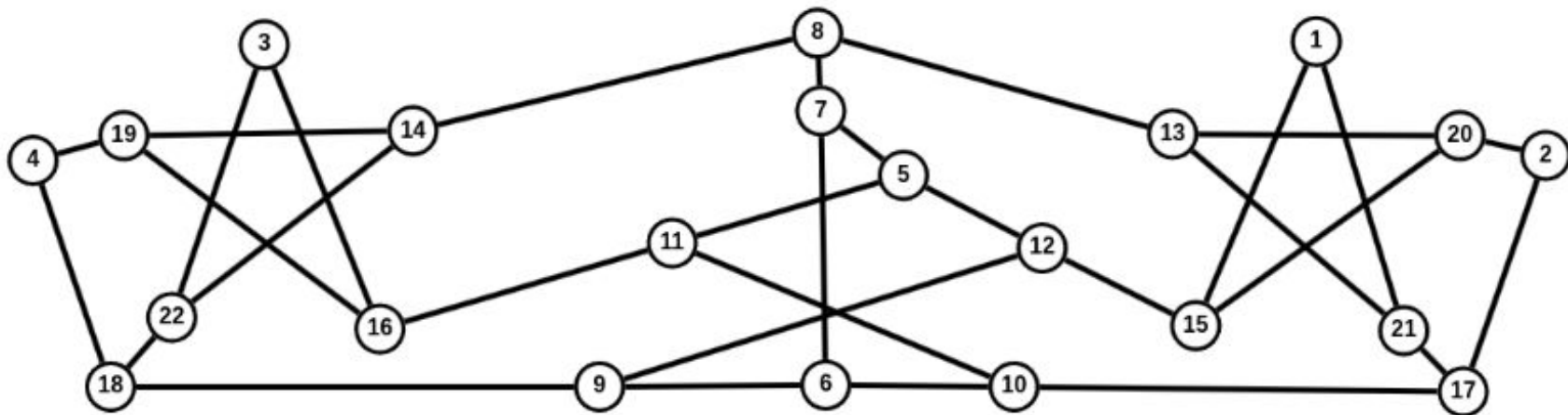
# all graphs	195
# all subgraphs	2385
Time sum [min]	22.936283333

Table 4.26: Total numbers for snarks ($g \geq 4$)

Tabuľky s vlastnosťami podgrafov

# vertices	9	17	19	21	22	23	24	25	26
# subgraphs	1	10	53	181	1	455	1	3822	1

Table 4.16: Distribution of subgraphs of snarks ($g \geq 5$) based on the number of vertices.



	# graphs
not contained in	346
contained in	1
its only subgraph	1

Table 4.21: Number of snarks ($g \geq 5$) which (do not) contain Petersen subgraph

# vertices	# edges	# subgraphs
0	2	2
1	3	671
1	4	29
		sum = 702

Table 4.22: Nearest snark with $g \geq 4$

# vertices	# edges	# subgraphs
0	2	3
1	3	4198
1	4	310
1	5	14
		sum = 4525

Table 4.23: Nearest snark with $g \geq 5$

3 typy podgrafov flower snarkov

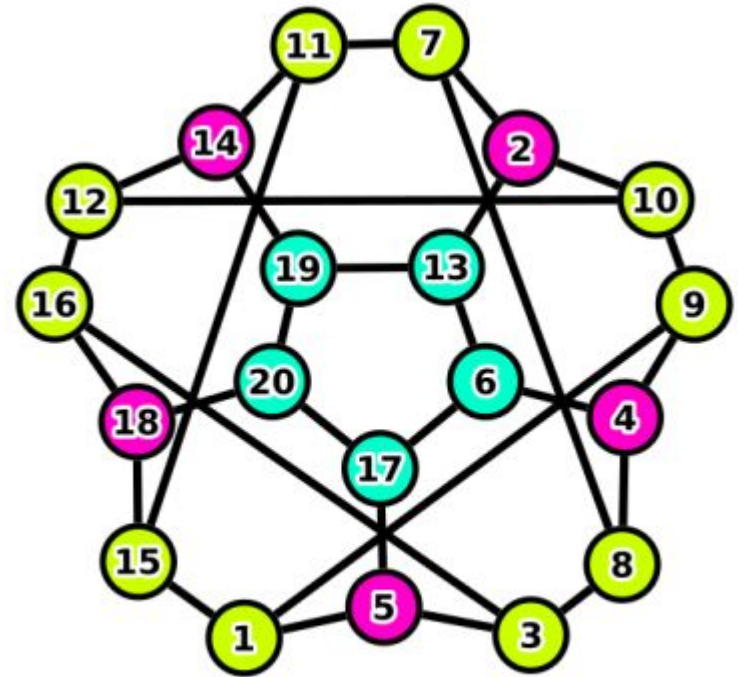
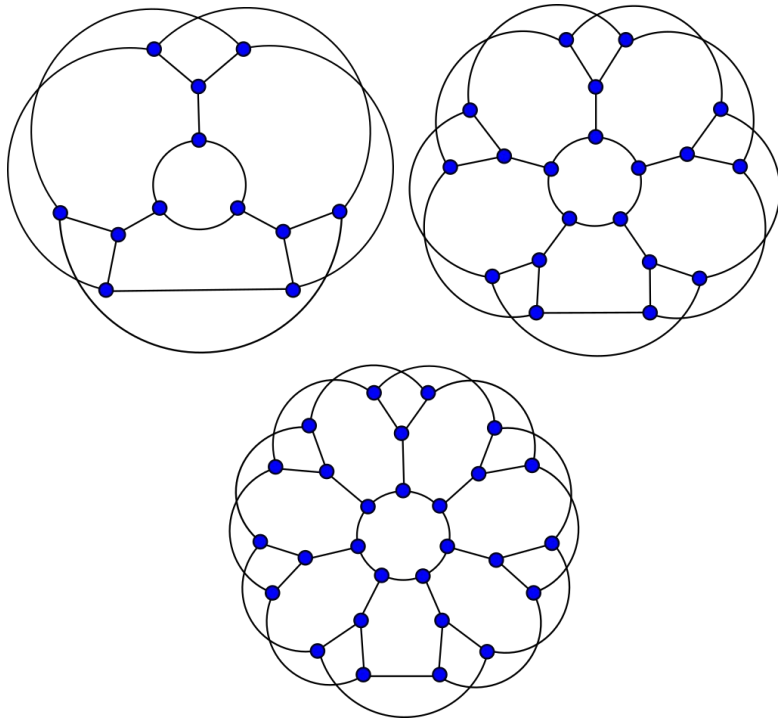


Figure 4.9: Three layers of vertices in flower snarks

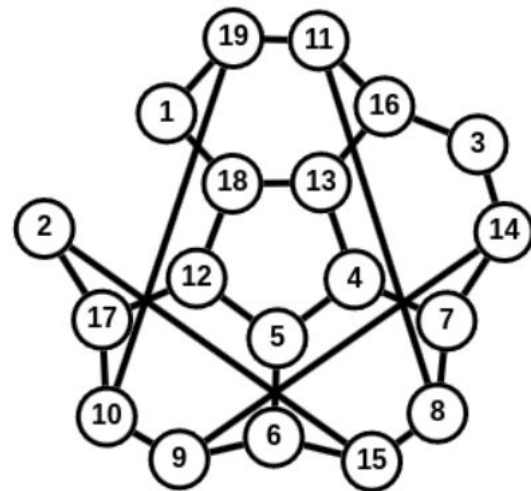
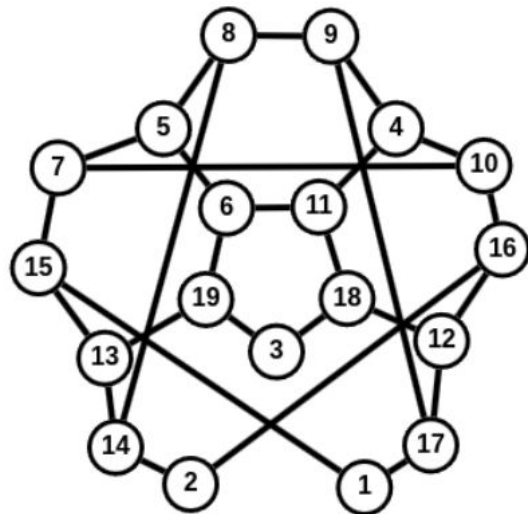
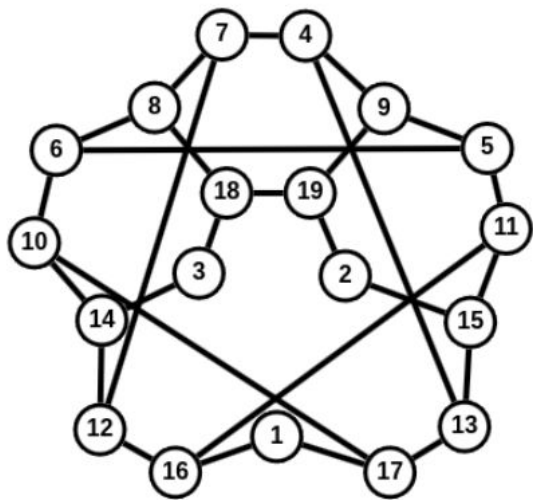


Figure 4.6: Subgraphs of 20-vertex Flower snark

Technické detaily

Technické detaily

FORMÁTY GRAFOV

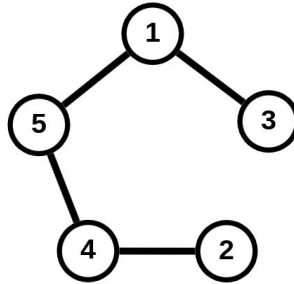
graph6, sparse6

KNIŽNICE

ba-graph, (nauty)

ULOŽENIE VÝSLEDKOV

.txt súbory s graph6 grafmi, rozdelené podľa rôznych vlastností



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

68 81 99
DQc

Zhrnutie

Otvorené otázky

PODGRAFY S ROVNAKÝM POČTOM VRCHOLOV AKO ICH ORIGINÁLNE GRAFY

GRAFY S PRÁVE JEDNÝM PODGRAFOM



Ďakujem za pozornosť



Zdroje

- By Leshabirukov - Own work by uploader based on http://en.wikipedia.org/wiki/File:Heawood_Graph.svg, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5788203>
- By Ojin - Own work, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4400649>
- <https://houseofgraphs.org/>
- Tomáš Vician. Cores of uncolourable cubic graphs. Univerzita Komenského v Bratislave FMFI, FMFI.KI, 2018.
- By Koko90 - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7642931>

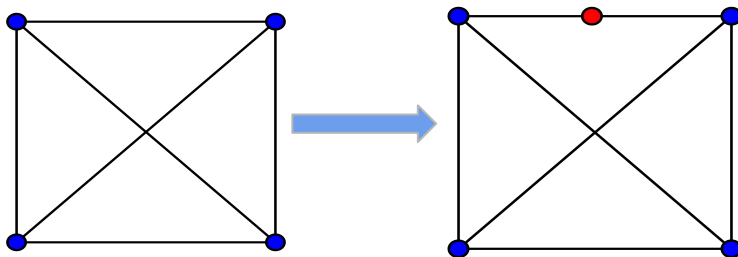
Otázky z posudkov

“Ako by bolo možné verifikovať správnosť použitého algoritmu na hľadanie minimálnych nezafarbiteľných podgrafov?”

- vygenerovať výsledky pomocou iného algoritmu a porovnať ich

“Poznáte nejaký iný, hoci možno pomalší algoritmus, ktorým by sme nezávisle vedeli tieto grafy generovať?”

- algoritmus: pridávanie vrcholov stupňa 2 do hrán (opačný prístup)



“Prečo v práci používate vlastnú štruktúru pre reprezentáciu grafu miesto triedy Graph z používanej knižnice ba-graph?”

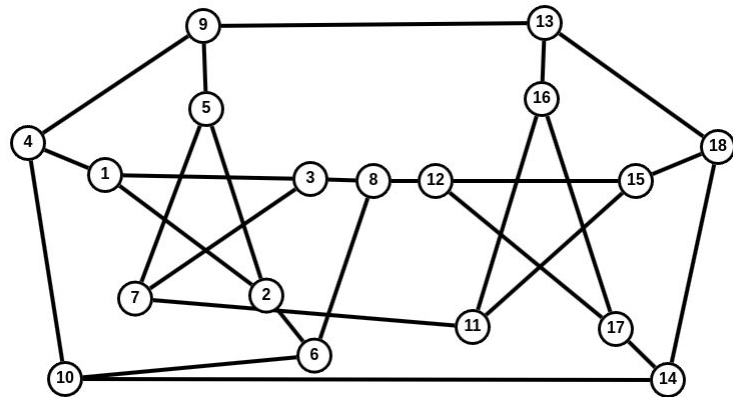
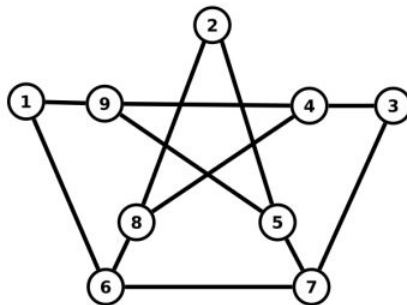
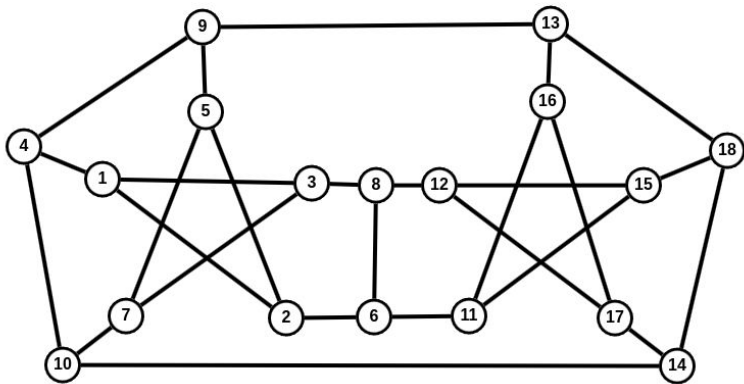
- práca s C knižnicami
- ľahšia práca

Prečo máte graf reprezentovaný cez maticu susednosti, keď pri kubických grafoch by mala byť rádovo efektívnejšia reprezentácia cez zoznam susedov?”

- graph6 formát

“Všetky nezafarbiteľné kubické grafy na obrázkoch v sekcii 4.1 obsahujú Petersenov podgraf. Existuje nezafarbiteľný kubický graf, ktorý nie je snarkom (teda má malý obvod alebo cyklickú súvislosť), ktorý neobsahuje Petersenov graf? Ak áno, viete ukázať jeho obrázok?”

- 8 grafov



Minimálne nezafarbiteľné podgrafy snarkov

Ďakujem za pozornosť