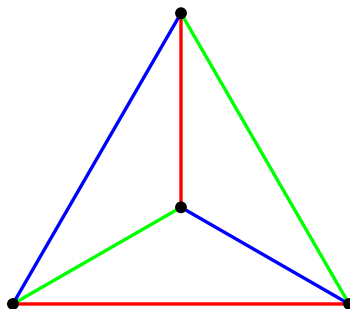


# Kubické grafy s malým počtom hranových 3-farbení

Nadiya Balanchuk  
Školiteľ: Mgr. Jozef Rajník, PhD.

26. júna 2024

- Kubický graf
- Hranové 3-farbenie
  - Farbenia líšiace sa iba permutáciou farieb sú ekvivalentné



Obr. 1: Hranové 3-farbenie grafu  $K_4$ .

- Kubický graf
- Hranové 3-farbenie
  - Farbenia líšiace sa iba permutáciou farieb sú ekvivalentné



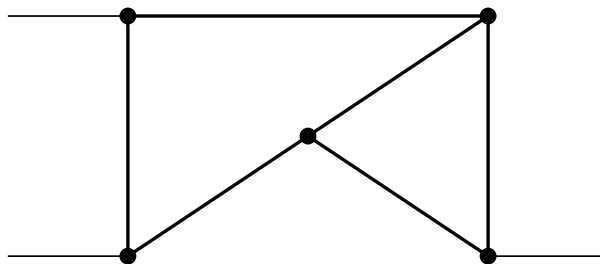
Obr. 2: Ekvivalentné hranové 3-farbenia grafu  $K_4$ .

- Kubický graf
- Hranové 3-farbenie
  - Farbenia líšiace sa iba permutáciou farieb, sú ekvivalentné



Obr. 3: Rôzne hranové 3-farbenia grafu  $K_{3,3}$ .

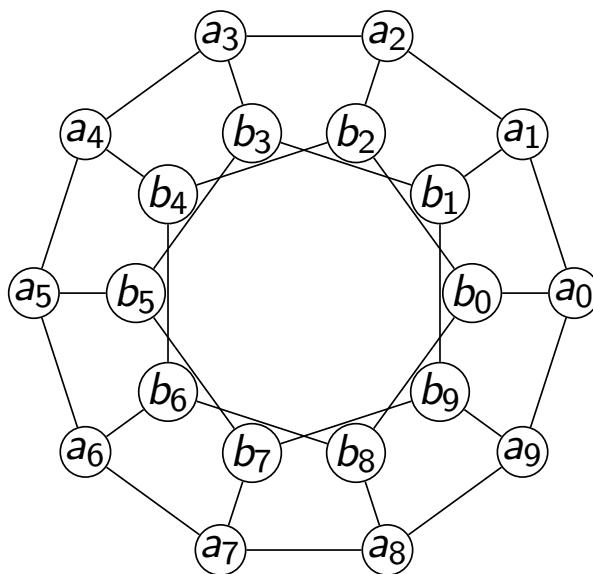
- Multipól
- $k$ -pól



Obr. 4: Kubický 3-pól.

# Jednoznačne hranovo 3-zafarbitel'né grafy

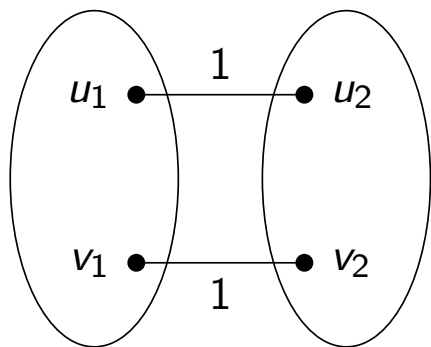
- Dlhotrvajúci výskum
- Takmer všetky známe majú cyklickú súvislosť nanajvýš 3
- Cyklickú súvislosť 5 má zo známych iba  $P(9, 2)$



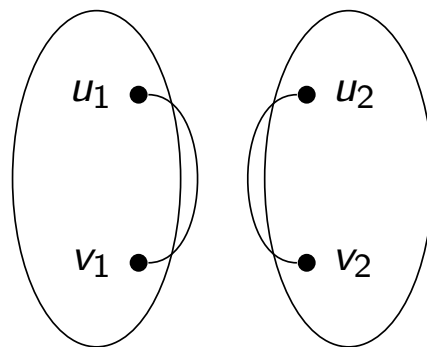
Obr. 5: Graf  $P(9, 2)$ .

# Známe výsledky – grafy s 2-rezom

- $c(G) = 2 \cdot c(G_1) \cdot c(G_2)$



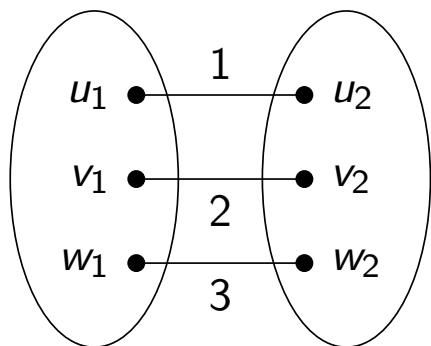
Obr. 6: 2-rez v kubickom grafe  $G$ .



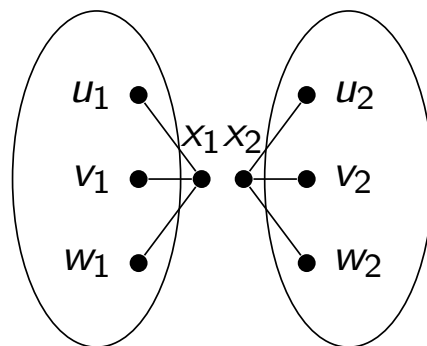
Obr. 7: Grafy  $G_1$  a  $G_2$ .

# Známe výsledky – grafy s 3-rezom

- $c(G) = c(G_1) \cdot c(G_2)$



Obr. 8: 3-rez v kubickom grafe  $G$ .



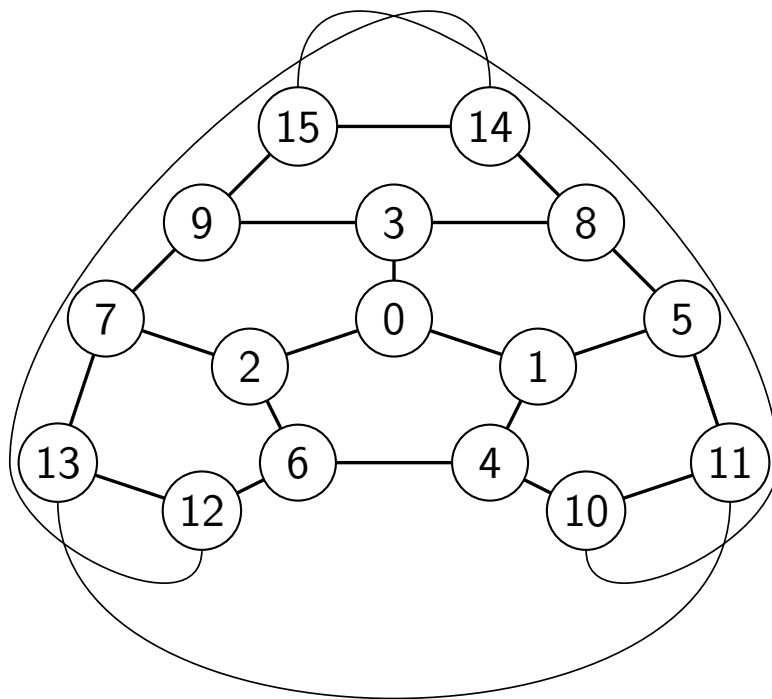
Obr. 9: Úprava  $G$  na  $G_1$  a  $G_2$ .



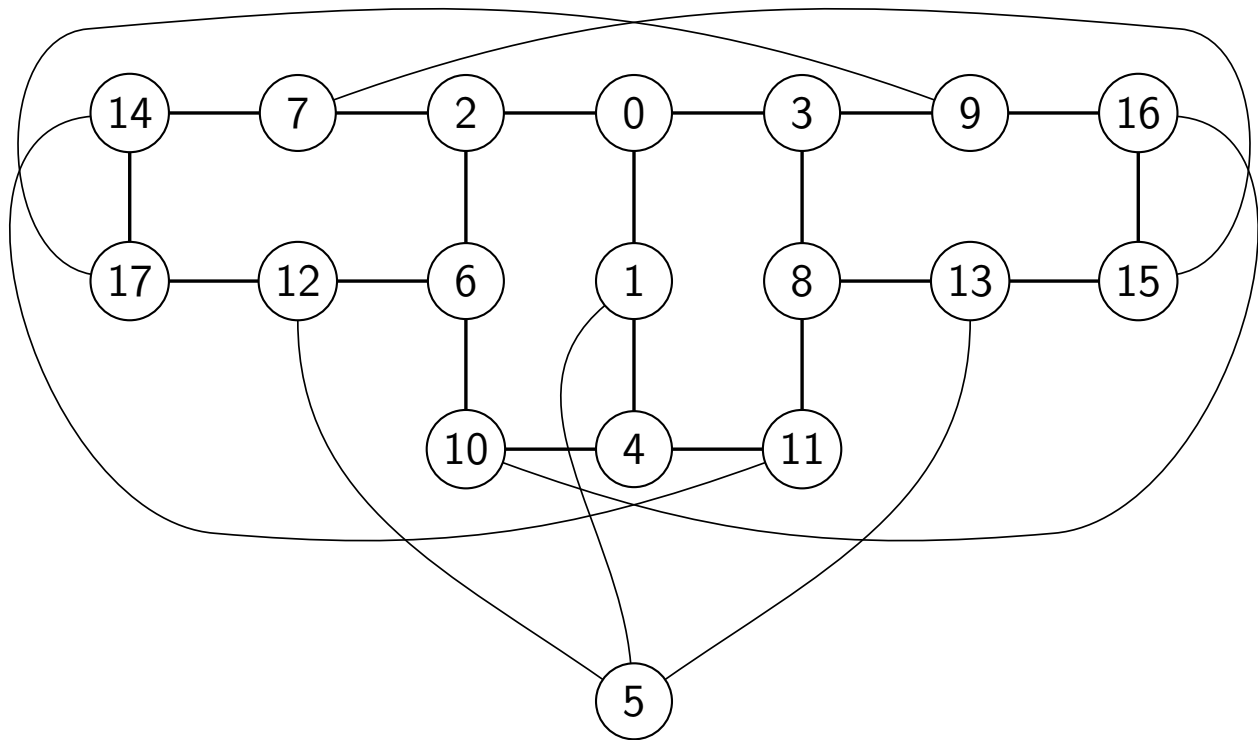
- Filtrovanie grafov pomocou softvéru
- Ručné skúmanie vlastností nájdených grafov s 2 hranovými 3-farbeniami
- Konštrukcie nekonečných tried podľa pozorovaní

Obvod $\geq$	# vrcholov $\leq$	# grafov	# grafov s 2 farbeniami
3	20	556 471	17 702
4	22	1 542 004	125
5	22	97 237	9
6	26	189 225	1
7	32	30 939	0
8	42	4 510	0

Tabuľka 1: Preskúmané kubické grafy.



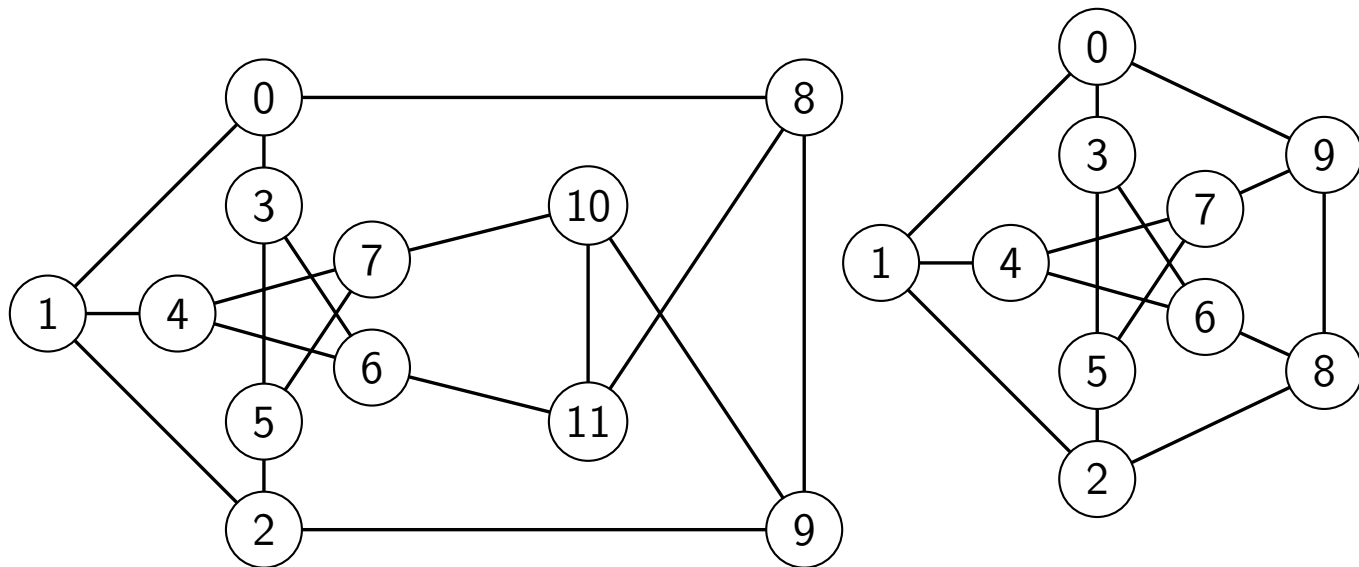
Obr. 10: Graf s cyklickou súvislosťou 5 a práve dvoma hranovými 3-farbeniami.



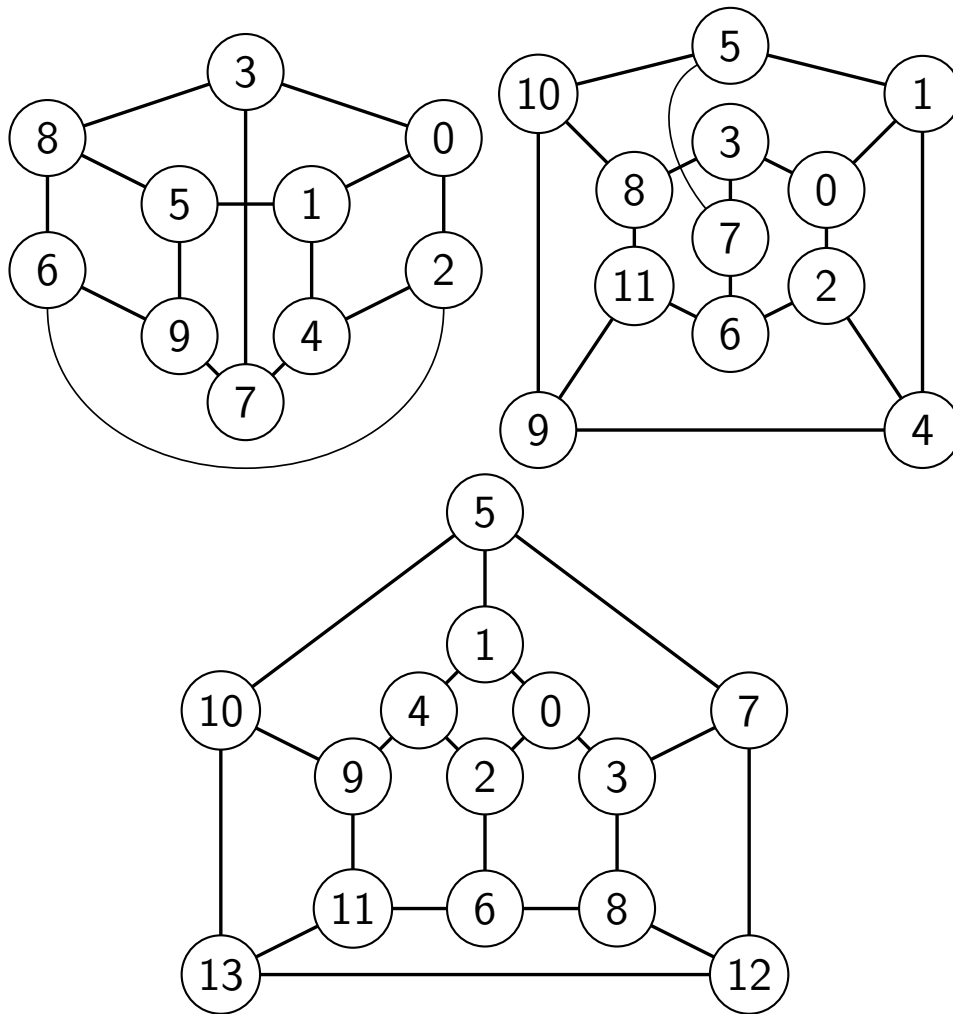
Obr. 11: Graf s cyklickou súvislosťou 6 a práve dvoma hranovými 3-farbeniami.

# Dopňovanie na snark

- Na grafoch do 20 vrcholov s cyklickou súvislosťou 4 a 2 hranovými 3-farbeniami



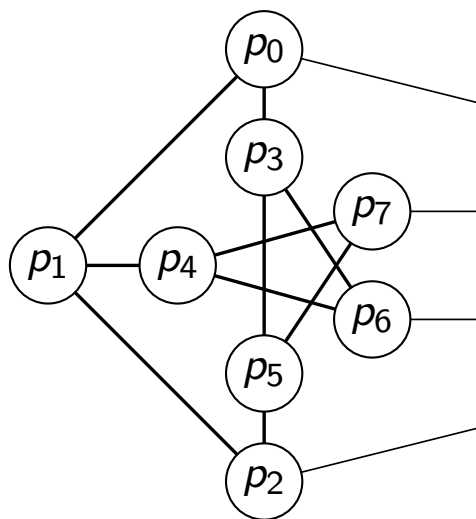
Obr. 12: Pôvodný graf s 2 hranovými 3-farbeniami a jeho upravená verzia.



Obr. 13: Grafy, ktoré sa nedajú doplniť na snark.

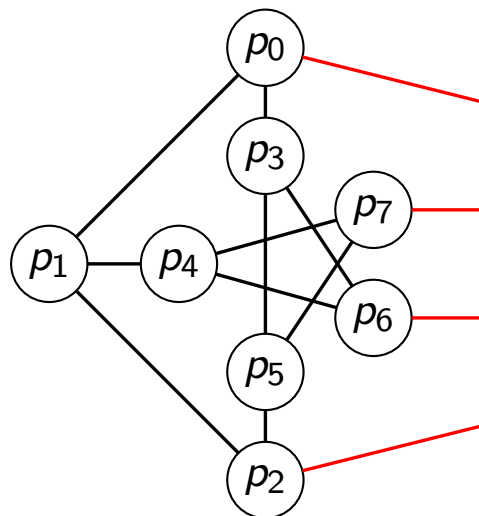
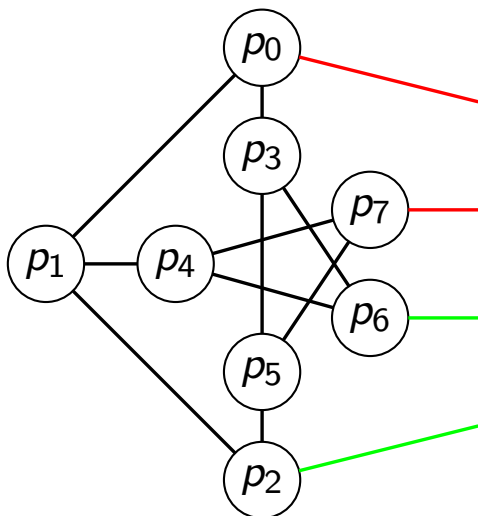
- Skonštruovali sme 2 nekonečné triedy grafov s práve dvoma 3-farbeniami
- Obidve majú cyklickú súvislosť 4
- Jedna má obvod 4, druhá má obvod 5

# Izochromatický Petersenov 4-pól

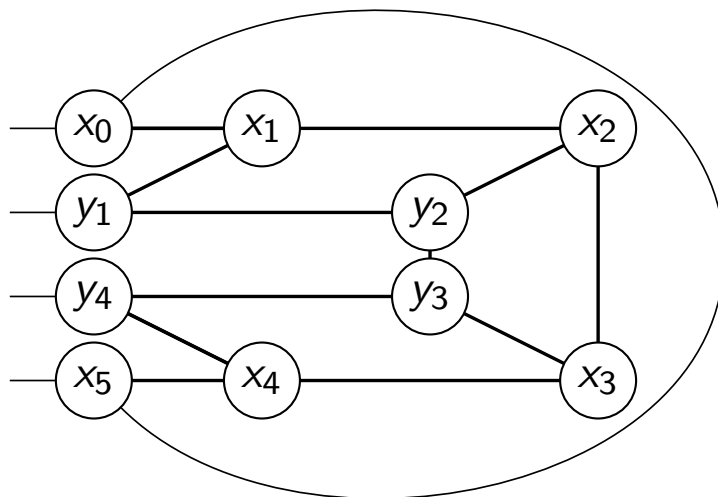


Obr. 14: Izochromatický Petersenov 4-pól.

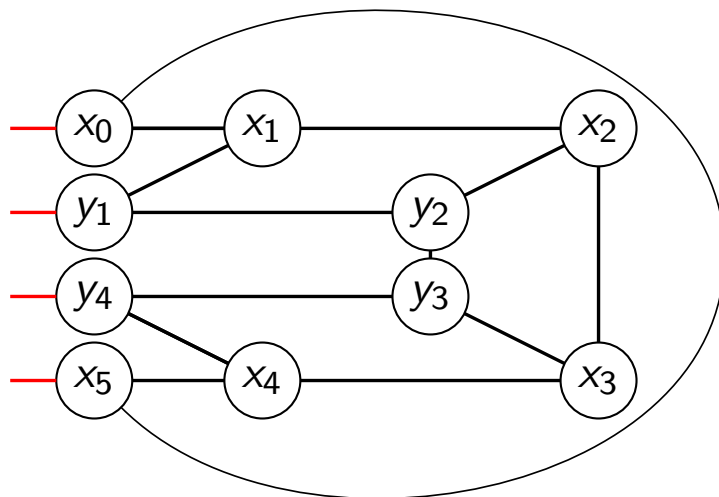
# Izochromatický Petersenov 4-pól



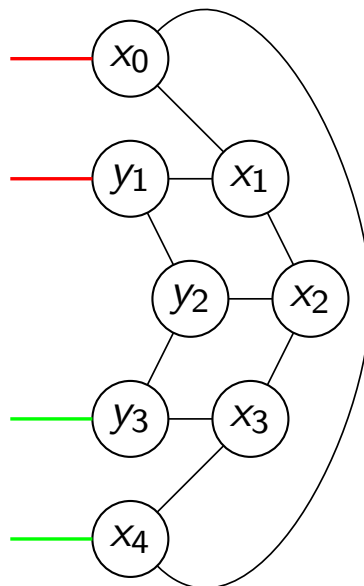




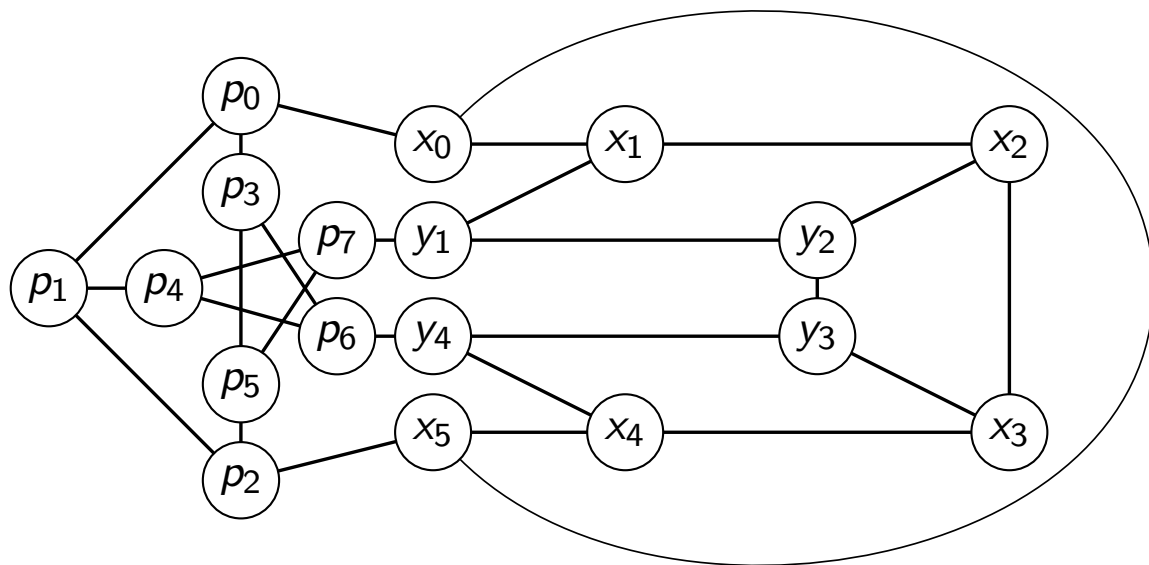
Obr. 15: Kubický 4-pól  $S_3$ .



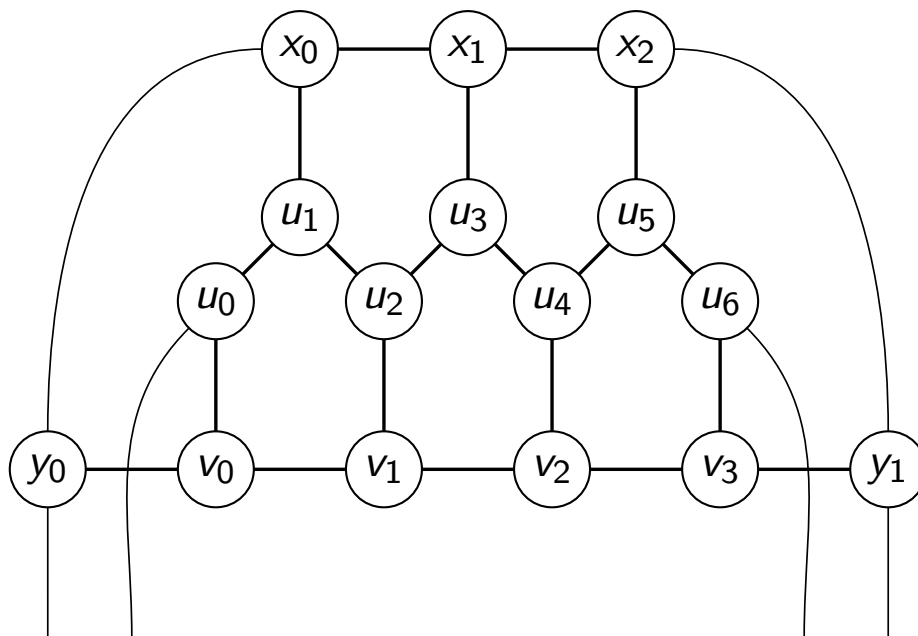
Obr. 16: Farbenie visiaticich hrán 4-pólu  $S_3$ .



Obr. 17: Farbenie visiaticich hrán 4-pólu  $S_2$ .

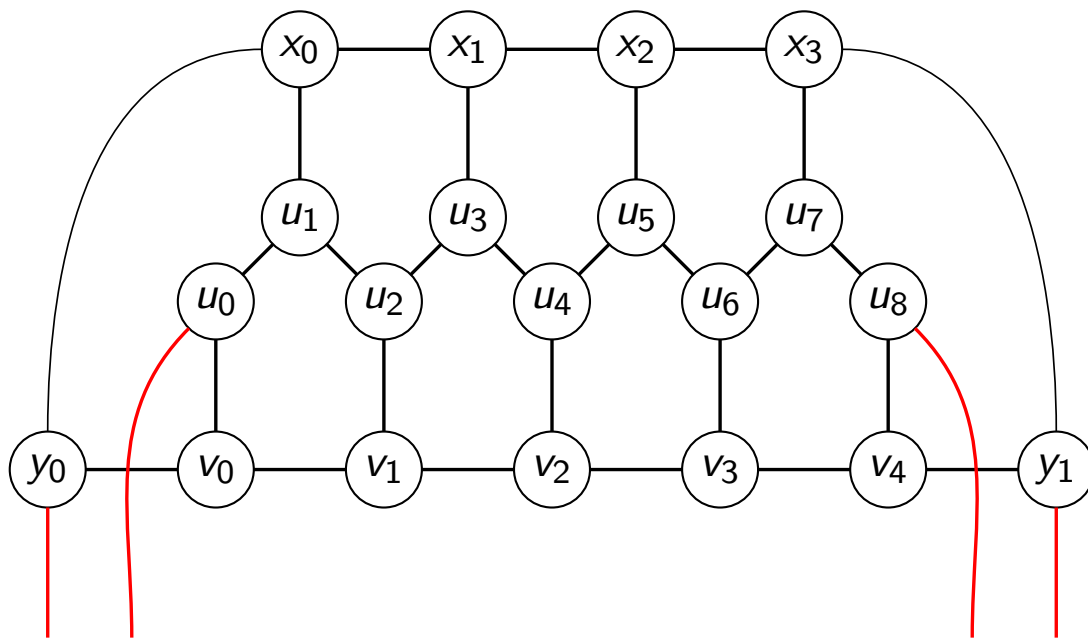


Obr. 18: Graf  $P * S_3$ .



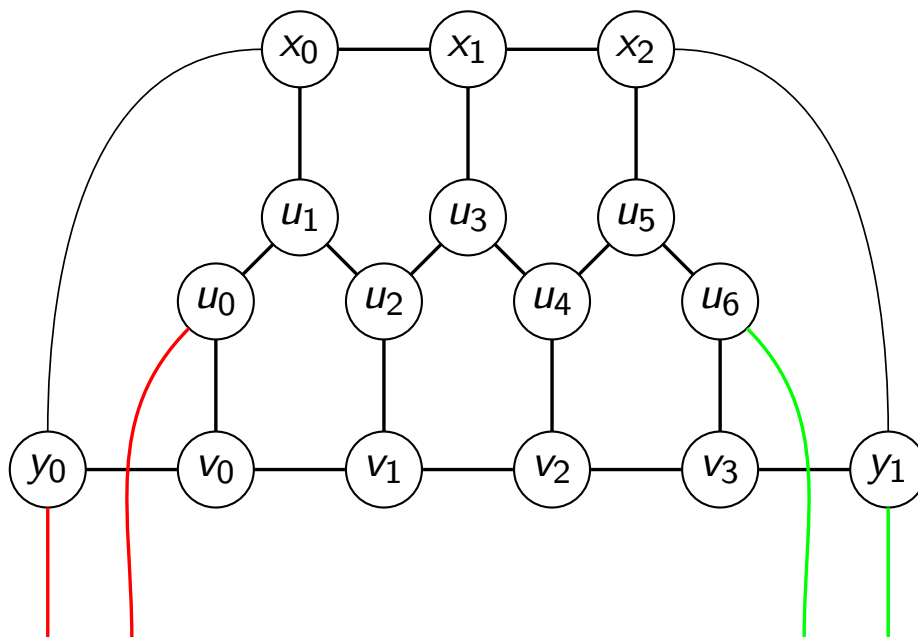
Obr. 19: Kubický 4-pól  $D_3$ .

- Ak  $k \equiv 2 \pmod{3}$



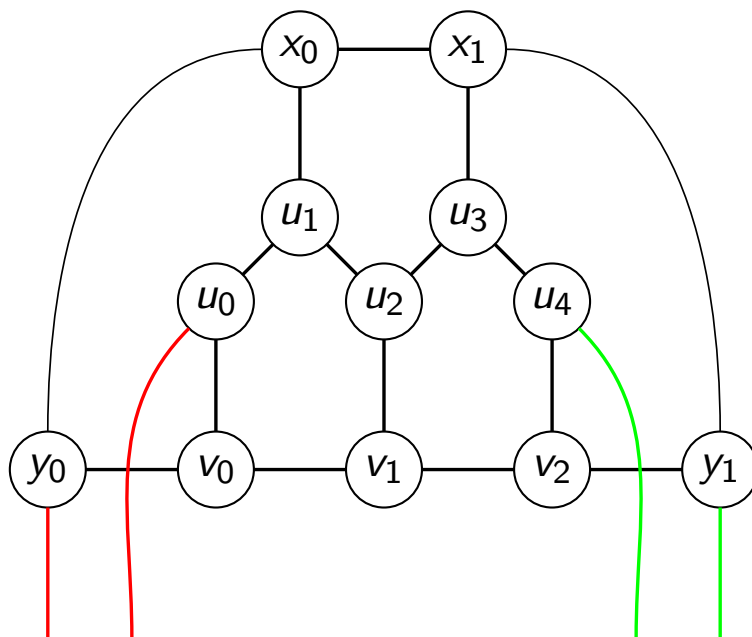
Obr. 20: Farbenie visiaticich hrán 4-pólu  $D_4$ .

- Ak  $k \equiv 0 \pmod{3}$



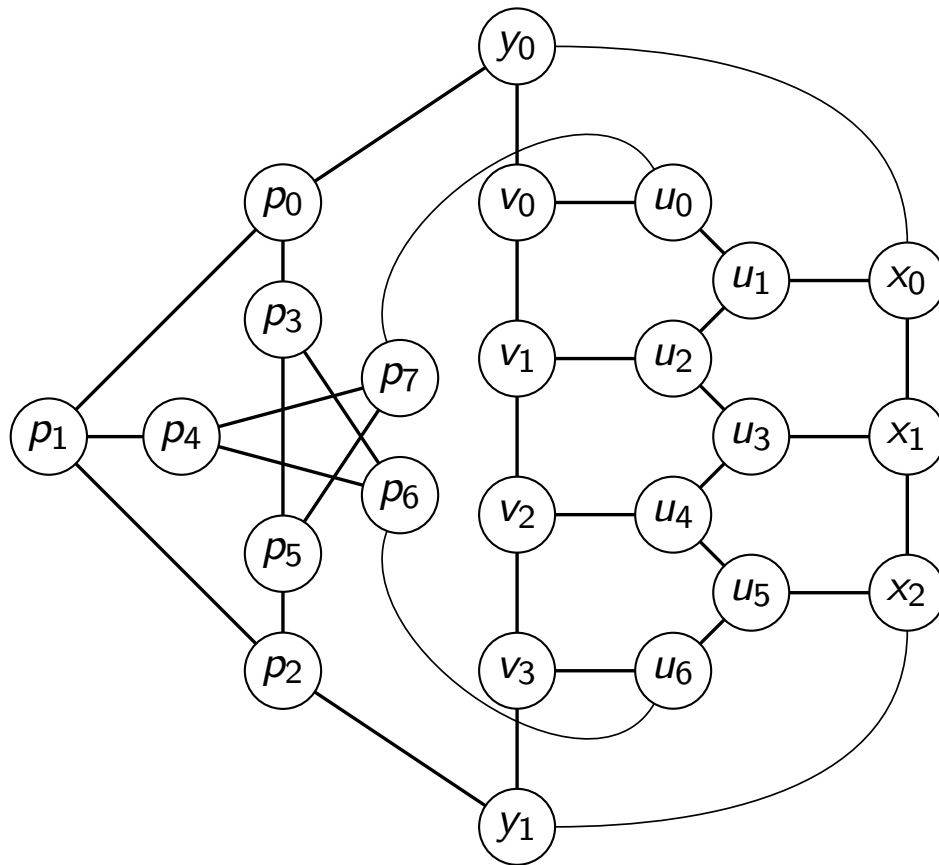
Obr. 21: Farbenie visiaticich hrán 4-pólu  $D_3$ .

- Ak  $k \equiv 1 \pmod{3}$



Obr. 22: Farbenie visiacych hrán 4-pólu  $D_2$ .





Obr. 23: Graf  $P * D_3$ .

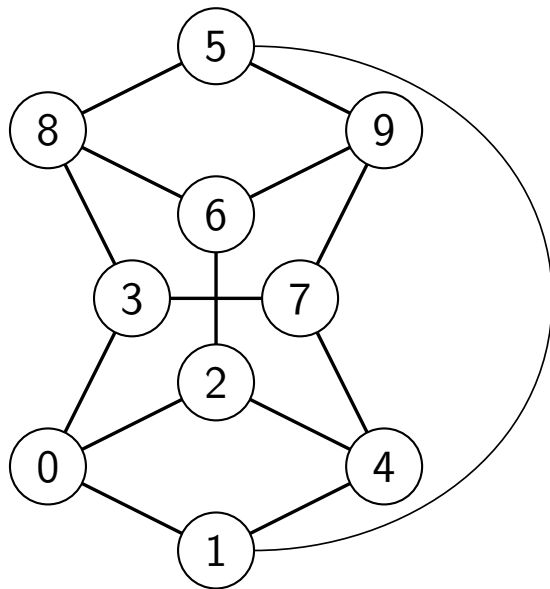
## Výsledky:

- Grafy s práve 2 hranovými 3-farbeniami
  - Preskúmanie štruktúry grafov
  - Grafy s cyklickou súvislosťou 5 a 6
  - Konštrukcia 2 nekonečných tried s cyklickou súvislosťou 4
  - Dôkazy počtu farbení nájdených nekonečných tried

- 1 Viete na nejakom grafe mimo vašich nekonečných tried ilustrovať, prečo má práve dve hranové 3-farbenia?
- 2 V sekcii 4.2 uvádzate, že 48 z 51 grafov obvodu 4 s najviac 20 vrcholmi možno po odstránení štvoruholníka doplniť na snark. Pre koľko grafov takto dostaneme Petersenov graf?

# 1. otázka od školiteľa

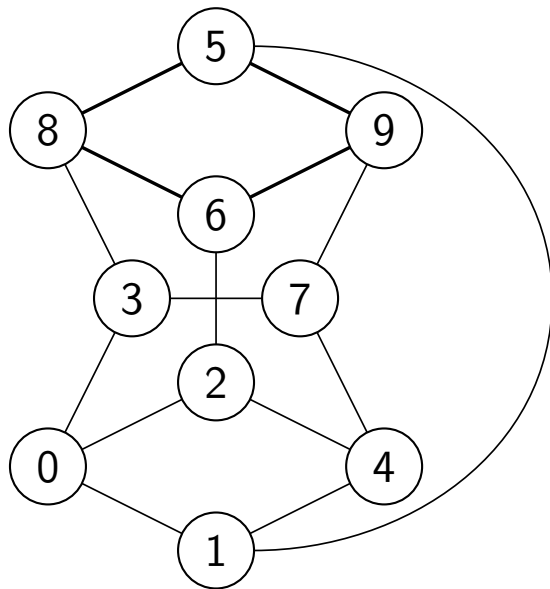
1. Viete na nejakom grafe mimo vašich nekonečných tried ilustrovať, prečo má práve dve hranové 3-farbenia?



Obr. 24: Kubický graf s dvoma hranovými 3-farbeniami.

# 1. otázka od školiteľa

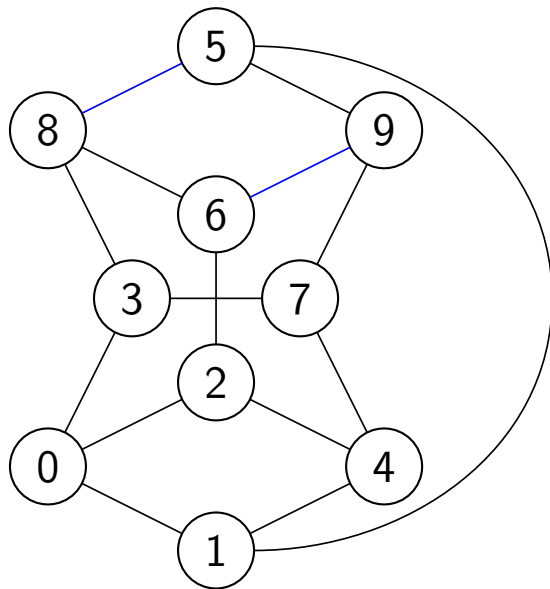
1. Viete na nejakom grafe mimo vašich nekonečných tried ilustrovať, prečo má práve dve hranové 3-farbenia?



Obr. 25: Kubický graf s dvoma hranovými 3-farbeniami.

# 1. otázka od školiteľa

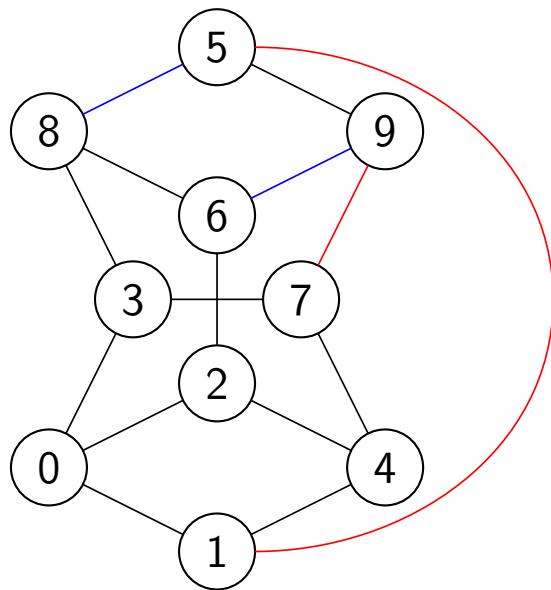
1. Viete na nejakom grafe mimo vašich nekonečných tried ilustrovať, prečo má práve dve hranové 3-farbenia?



Obr. 26: Kubický graf s dvoma hranovými 3-farbeniami.

# 1. otázka od školiteľa

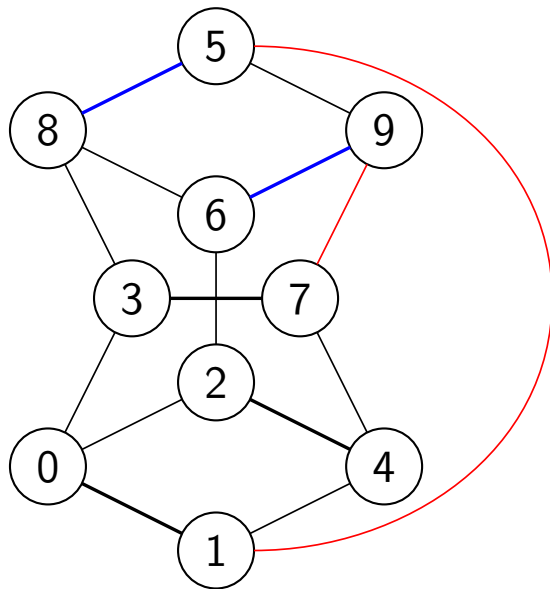
1. Viete na nejakom grafe mimo vašich nekonečných tried ilustrovať, prečo má práve dve hranové 3-farbenia?



Obr. 27: Kubický graf s dvoma hranovými 3-farbeniami.

# 1. otázka od školiteľa

1. Viete na nejakom grafe mimo vašich nekonečných tried ilustrovať, prečo má práve dve hranové 3-farbenia?

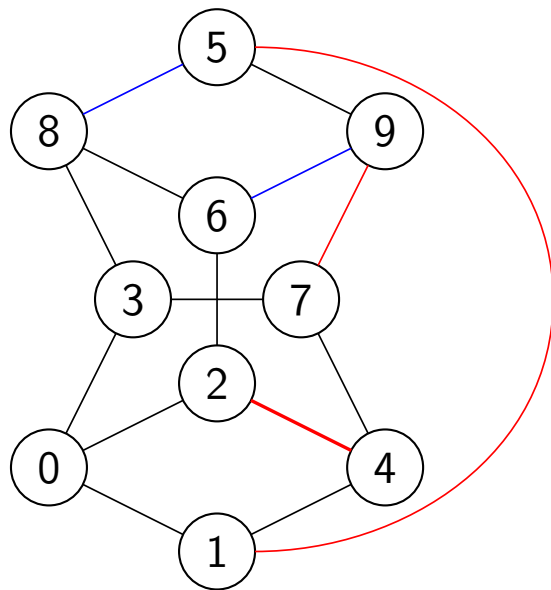


Obr. 28: Kubický graf s dvoma hranovými 3-farbeniami.



# 1. otázka od školiteľa

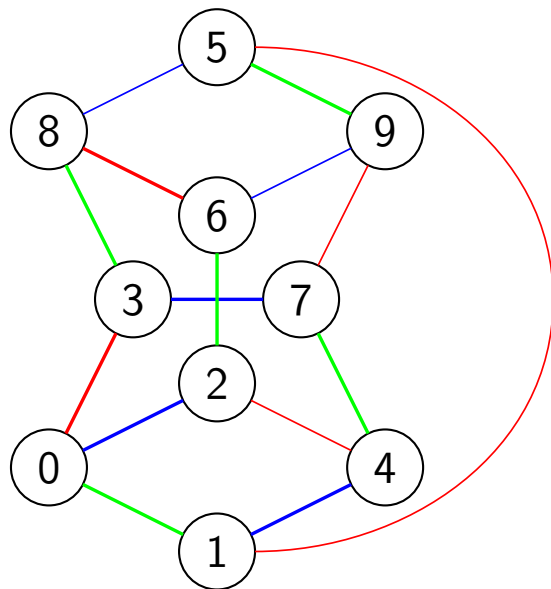
1. Viete na nejakom grafe mimo vašich nekonečných tried ilustrovať, prečo má práve dve hranové 3-farbenia?



Obr. 29: Kubický graf s dvoma hranovými 3-farbeniami.

# 1. otázka od školiteľa

1. Viete na nejakom grafe mimo vašich nekonečných tried ilustrovať, prečo má práve dve hranové 3-farbenia?



Obr. 30: Kubický graf s dvoma hranovými 3-farbeniami.

## 2. otázka od školiteľa

*2. V sekcii 4.2 uvádzate, že 48 z 51 grafov obvodu 4 s najviac 20 vrcholmi možno po odstránení štvoruholníka doplniť na snark. Pre koľko grafov takto dostaneme Petersenov graf?*

*V kapitole 4, popisujete veľmi stručne metodiku. Konkrétne ste teda prechádzali množinu grafov, o ktorých ste pomocou počítača vedeli, že majú práve dve hranové 3-farbenia. Zaujímalo by ma preto, aké metódy ste použili na hľadanie vzťahov medzi jednotlivými grafmi.*