Algoritmus na určenie cirkulárneho chromatického indexu kubického grafu

Radoslav Petráni
doc. RNDr. Robert Lukoťka, PhD.

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave

2024

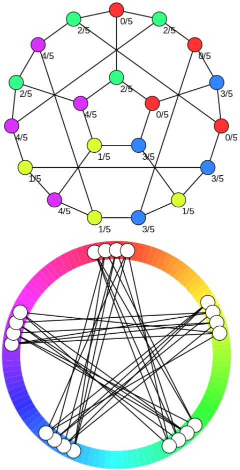
Cieľ práce

Cieľom práce je zostrojiť algoritmus, na riešenie problému cirkulárneho hranového farbenia na kubických grafoch, aj na iných plochách ako rovina, použitím lineárneho programovania a duality farbenia a tokov na efektívnejšie dosiahnutie výsledku.

Cirkulárne farbenie

- k-cirkulárne farbenie grafu G=(V,E) je zobrazenie c: $V \to [0, k)$, kde pre každé dva susedné vrcholy u a v: $1 \leq |c(u) - c(v)| \leq k - 1$
- ak sa jedná o hranové cirkulárne farbenie nahradíme vrcholy hranami

Cirkulárne farbenie



Obr.: obrázok patrí do wikipedia commons

Cirkulárny index

- cirkulárne chromatické číslo grafu, χ_c, je infímum z r, takých, že graf je cirkulárne r-zafarbiteľný
- cirkulárny chromatický index grafu, χ'_c, je infímum z r, takých, že graf je cirkulárne r-hranovo zafarbiteľný
- hľadanie cirkulárneho čísla alebo indexu patrí k NP-optimalizačným problémom

Dualita cirkulárneho farbenia a cirkulárneho toku

- cirkulárny r-tok je priradenie orientácie a tokovej funkcie: $\phi : E \to [1, r-1]$ grafu tak, že súčet tokových hodnôt hrán vchádzajúcich a vychádzajúcich sa musí rovnať pre každý vrchol grafu
- cirkulárne tokové číslo grafu ϕ_C je infímum z r, takých, že graf má cirkulárny r-tok
- v rovine existuje dualita medzi cirkulárnym farbením a cirkulárnym tokom: $\chi_c(G) = \phi_c(G')$

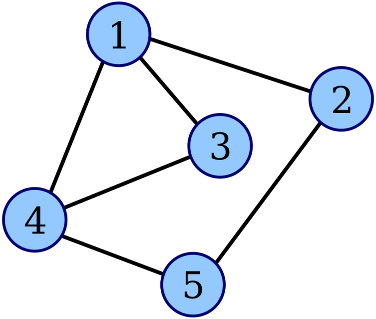
Dualita v iných priestoroch

- pre grafy vnorené do iných orientovateľných priestorov ako rovina
- nech $A_1, \ldots, A_n$ je báza priestoru tvoreného oblasťami grafu
- $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ je báza cyklového priestoru
- pre graf G a jeho duálny graf G',
- $\chi_c(G) = \phi_C(G') \Leftrightarrow$ tok na každom B_i v G' sa rovná nule, $i \in (1, m)$

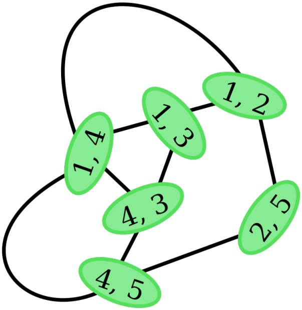
Implementácia

- hranový graf
- hladanie všetkých oblastí grafu
- hľadanie bázy cyklového priestoru grafu
- duálny graf
    - zachovanie orientácie a poradia hrán

Hranový graf



Obr.: obrázok patrí do wikipedia commons

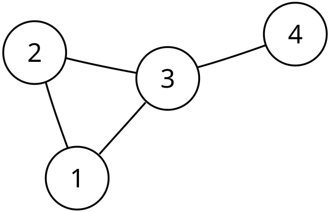


Obr.: obrázok patrí do wikipedia commons

Oblasti grafu

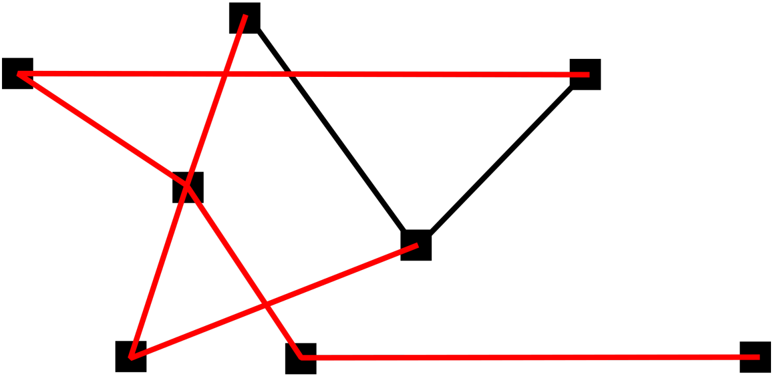
Graf ako matica susednosti:

- (2,3)
- (3,1)
- (1,2,4)



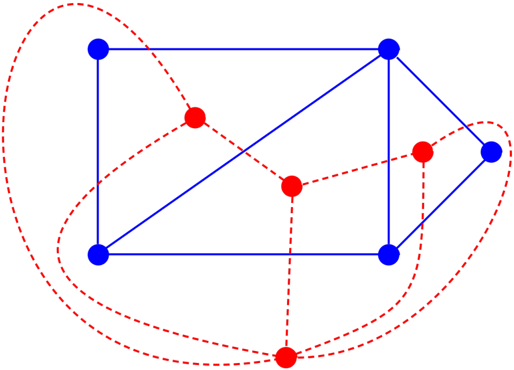
Obr.: obrázok patrí do wikipedia commons

Báza cyklového priestoru



Obr.: obrázok patrí do wikipedia commons

Duálny graf



Obr.: obrázok patrí do wikipedia commons

Linearne programovanie

- na zakódovanie toku ako lineárny program sme použili balancované ohodnotenia
- balancované ohodnotenie r-toku na G je (O, ϕ, b), kde O je orientácia, a zobrazenia $b : V \to \mathbb{Z}$ a $\phi : E \to \mathbb{R}$, a platí:
  - $b(v) \equiv deg(v)(mod\ 2)$ pre $v \in V(G)$,
  - $-\frac{r-2}{r} \leq \phi(e) \leq \frac{r-2}{r}$ pre $e \in E(G)$,
  - $\sum_{e \in E^+(v)} \phi(e) - \sum_{e \in E^-(v)} \phi(e) = b(v)$ pre $v \in V(G)$.

Triviálny algoritmus

Na porovnanie efektivity sme zkonštruovali triviálny algoritmus ktorý pomocou lineárneho programovania počíta cirkulárny index grafu

- zákodujeme definíciu cirkulárneho hranového farbenia ako obmedzenia v lineárnom programe

Výsledky

Small cubic graphs				
graph	vertex order	ϕ_c	time dual (s)	time trivial (s)
K4	4	3	0,001	0,001
Cubical graph	8	3	0,002	0,002
Pentagonal prism	10	3	0,004	0,005
Small non-planr graph	10	3	0,028	0,005
Petersen	10	$\frac{11}{3}$	0,329	3,246

Obr.: výsledky behu algoritmu pre niektoré malé kubické grafy

Výsledky

Flower Snarks				
index	vertex order	ϕ_c	time dual (s)	time triv-ial (s)
3	12	$\frac{7}{2}$	0,815	3,939
4	16	3	2,238	0,573
5	20	$\frac{17}{5}$	198,262	1253,579
7	28	$\frac{10}{3}$	31 052,234	47 654,323

Obr.: výsledky behu algoritmu pre Isaacove flower snarky

Výsledky

Blanuša and Goldberg snarks				
graph	vertex order	ϕ_c	time dual (s)	time trivial (s)
First Blanuša snark	18	$\frac{10}{3}$	16,371	287,863
second Blanuša snark	18	$\frac{13}{4}$	27,108	96,586
Goldberg snark G_3	24	$\frac{10}{3}$	109,366	2873,073

Obr.: výsledky behu algoritmu pre Blanušove a Goldbergove snarky

Otázky z posudkov

- viac informácií o jednotlivých použitých snarkoch, konkrétne vnorenie, dimenzie výsledného lineárneho programu
- závisí efektivita algoritmu od voľby vnorenia grafu?
- na nájdenie cyklovej bázy priestoru som použil, algoritmus BFS, neexistuje optimálnejší prístup?