

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

HRANOVÉ FARBENIA REGULÁRNYCH GRAFOV  
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024

BC. MATÚŠ ZUBČÁK



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

H RANOVÉ FARBENIA REGULÁRNYCH GRAFOV  
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Informatika  
Študijný odbor: Informatika  
Školiace pracovisko: Katedra informatiky, FMFI UK  
Školiteľ: doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD.

Bratislava, 2024  
Bc. Matúš Zubčák





Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Matúš Zubčák  
**Študijný program:** informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** informatika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Hranové farbenia regulárnych grafov  
*Edge colorings of regular graphs*

**Anotácia:** Hranové farbenia kubických grafov majú významné postavenie vzhľadom na viaceré otvorené hypotézy z teórie grafov. Je známe, že každý kubický graf má regulárne hranové zafarbenie, ktoré používa 3 alebo 4 farby.

Diplomová práca bude venovaná určeniu počtu regulárnych 3-zafarbení kubického grafu, prípadne grafov, ktoré z daného grafu vznikli jednoduchou operáciou. Úlohou študenta bude navrhnúť a implementovať softvér na zisťovanie tohto počtu a na základe počítačových výsledkoch vyvodit' hypotézy, ktoré študent následne dokáže aspoň pre užšie triedy grafov.

**Vedúci:** doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KI - Katedra informatiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.  
**Dátum zadania:** 10.01.2023

**Dátum schválenia:** 23.01.2023

prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce



**PodĎakovanie:** Touto cestou sa chcem poĎakovať mojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Edite Mačajovej, PhD. za pomoc, trpezlivosť, cenné rady, konzultácie, aktívnu komunikáciu a študijné materiály.  
Ďakujem tiež svojej rodine a najbližším priateľom za podporu a trpezlivosť.

## Abstrakt

V našej práci skúmame Kászonyiho funkciu a maximálne počty hranových 4-farbení na jednoduchých 4-regulárnych grafoch. V teórii grafov sú hranovo 3-nezafarbiteľné kubické grafy predmetom intenzívneho výskumu, pretože mnohé známe hypotézy v teórii grafov je postačujúce dokázať pre kubické grafy a pre hranovo 3-zafarbiteľné kubické grafy sú už tieto hypotézy dokázané. Kászonyiho funkcia ponúka isté charakteristiky pre hranovo 3-nezafarbiteľné kubické grafy. Presnejšie, Kászonyiho funkcia  $\psi(G, e)$  vyjadruje počet rôznych hranových 3-farbení kubického grafu  $G$  po potlačení hrany  $e$ , pričom potlačenie hrany je odobratie hrany a vyhladenie incidentných vrcholov druhého stupňa. V práci určíme hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G, e)$  pre ľubovoľnú hranu  $e$  každého grafu z nekonečnej triedy rotačných binárnych snarkov. V druhej časti našej práce pomocou výpočtovej techniky určíme počet hranových 4-farbení na 4-regulárnych grafoch do 18 vrcholov. Ako  $\text{MAX}_c(n)$  definujeme funkciu, ktorá určuje maximálny počet hranových 4-farbení na jednoduchých 4-regulárnych grafoch v závislosti od počtu vrcholov  $n$ . Na základe pozorovania súvislostí medzi grafmi s maximálnym počtom 4-farbení na 4-regulárnych grafoch do 18 vrcholov skonštruujeme nekonečnú triedu 4-regulárnych grafov, ktorá ponúka kvalitný netriviálny dolný odhad funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ . Súčasťou práce je aj dôkaz počtu hranových 4-farbení pre ľubovoľný graf z tejto nekonečnej triedy grafov.

**Kľúčové slová:** snark, Kászonyiho funkcia, rotačné binárne snarky, 4-regulárne grafy, regulárne hranové farbenia



## Abstract

In our thesis, we analyze Kászonyi's function and the maximum numbers of 4-edge-colorings on simple 4-regular graphs. In graph theory 3-edge-uncolorable cubic graphs are the subject of intensive research, as many known hypotheses in graph theory suffice to prove for cubic graphs, and for 3-edge-colorable cubic graphs, these hypotheses are already proven. Kászonyi's function offers certain characteristics for 3-edge-uncolorable cubic graphs. More precisely, Kászonyi's function  $\psi(G, e)$  expresses the number of different 3-edge-colorings of a cubic graph  $G$  after suppressing an edge  $e$ , where edge suppression is the removal of the edge and the smoothing of the incident vertices of degree 2. In the thesis, we determine the value of Kászonyi's function  $\psi(G, e)$  for any edge  $e$  of each graph from an infinite class of rotation binary snarks. In the second part of the thesis, using computational techniques, we determine the number of 4-edge-colorings on 4-regular graphs up to 18 vertices. We define  $\text{MAX}_c(n)$  as the function that determines the maximum number of 4-edge-colorings on simple 4-regular graphs based on the number of vertices  $n$ . Based on observations of the relationships between graphs with the maximum number of 4-edge-colorings on 4-regular graphs up to 18 vertices, we construct an infinite class of 4-regular graphs that offer a quality non-trivial lower bound of the function  $\text{MAX}_c(n)$ . The thesis also includes proof of the number of 4-edge-colorings for any graph from this infinite class of graphs.

**Keywords:** snark, Kászonyi function, rotation binary snarks, 4-regular graphs, regular edge-colorings



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Úvod do problematiky Kászonyiho funkcie</b>	<b>3</b>
1.1 Vlastnosti a výsledky v oblasti výskumu Kászonyiho funkcie . . . . .	4
1.2 Isaacsove a zovšeobecnené Blanušove snarky . . . . .	7
<b>2 Kászonyiho funkcia a rotačné binárne snarky</b>	<b>11</b>
2.1 Rotačné binárne snarky . . . . .	11
2.2 Rozbor farbení (2, 2, 1)-pólov . . . . .	15
2.3 Farbenia po potlačení hrany na Petersenovom negátore . . . . .	19
2.4 Kászonyiho funkcia pre rotačné binárne snarky . . . . .	26
2.4.1 Dôkaz pre sivé hrany . . . . .	28
2.4.2 Dôkaz pre fialové hrany . . . . .	31
2.4.3 Dôkaz pre modré hrany . . . . .	34
2.4.4 Dôkaz pre zelené hrany . . . . .	39
2.4.5 Dôkaz pre červené hrany . . . . .	42
2.4.6 Dôkaz pre oranžové hrany . . . . .	44
2.4.7 Hodnoty Kászonyiho funkcie pre malé rotačné binárne snarky .	51
<b>3 Maximálny počet farbení na 4-regulárnych grafoch</b>	<b>55</b>
3.1 Počítačom podporované skúmanie 4-regulárnych grafov . . . . .	56
3.1.1 #SAT solver a konverzia problému hranového farbenia na problém SAT . . . . .	57
3.2 Výsledky počítačového skúmania a ich zovšeobecnenie . . . . .	59
3.2.1 Malé grafy s maximálnym počtom hranových farbení . . . . .	61
3.2.2 Rozšírenie výsledkov pomocou dynamického programovania . . .	66
3.3 Skúmanie počtu hranových farbení na triede grafov citadela . . . . .	69
<b>Záver</b>	<b>79</b>



# Zoznam obrázkov

1.1	Potlačenie hrany $e$ . . . . .	5
1.2	Petersenov graf ako najmenší jednoduchý snark . . . . .	5
1.3	Isaacsov (3, 3)-pól $Y$ a farebná vizualizácia priradenia jeho hrán do tried . . . . .	8
1.4	Isaacsov snark $J_5$ a farebná vizualizácia priradenia jeho hrán do štyroch tried . . . . .	9
1.5	Blanušov (2, 2)-pól $B$ (vľavo) a (2, 2)-pól $I$ . . . . .	10
1.6	Postupná konštrukcia zovšeobecneného Blanušovho snarku . . . . .	10
2.1	Petersenov negátor $B_2$ . . . . .	12
2.2	Konštrukcia (2, 2, 1)-pólu $B_{i+1} = B_i \odot B'_i$ z dvoch (2, 2, 1)-pólov $B_i$ a $B'_i$ . . . . .	13
2.3	Rotačný binárny snark $G_i$ ako spojenie troch (2, 2, 1)-pólov $B_{i-1}$ . . . . .	15
2.4	(2, 2, 1)-pól $B_2 \sim v_1v_2$ . . . . .	20
2.5	(1, 2, 1)-pól $B_2 \sim e_2$ . . . . .	22
2.6	(1, 2, 1)-pól $B_2 \sim f_2$ . . . . .	23
2.7	(2, 2)-pól $B_2 \sim r$ . . . . .	25
2.8	Vizuálne rozdelenie hrán jedného z (2, 2, 1)-pólov $B_5$ rotačného binárneho snarku $G_6$ do šiestich tried . . . . .	27
2.9	(2, 2)-pól $B_3$ po potlačení reziduálnej hrany $r$ . . . . .	31
2.10	Rotačný binárny snark $G_i$ po potlačení fialovej hrany . . . . .	32
2.11	(1, 2, 1)-pól $B_{i+1} \sim e$ . . . . .	35
2.12	(1, 2, 1)-pól $B_{i+1} \sim f$ . . . . .	37
2.13	Rotačný binárny snark $G_i$ po potlačení modrej hrany $e$ . . . . .	38
2.14	(2, 2, 1)-pól $B_3 \sim e$ ako napojenie (2, 2)-pólu $B_2 \sim r$ na (2, 2, 1)-pól $B_2$ . . . . .	39
2.15	(2, 2, 1)-pól $B_3 \sim e$ ako napojenie (2, 2, 1)-pólu $B_2$ na (2, 2)-pól $B_2 \sim r$ . . . . .	43
2.16	(2, 2, 1)-pól $B_3 \sim e$ po potlačení hornej ľavej oranžovej hrany $e$ . . . . .	45
2.17	(2, 2, 1)-pól $B_3 \sim e$ po potlačení dolnej ľavej oranžovej hrany $e$ . . . . .	46
2.18	(2, 2, 1)-pól $B_4 \sim e$ po potlačení hornej pravej oranžovej hrany $e$ . . . . .	47
2.19	(2, 2, 1)-pól $B_4 \sim e$ po potlačení dolnej pravej oranžovej hrany $e$ . . . . .	50
2.20	Grafické rozdelenie hrán rotačného binárneho snarku $G_3$ do tried pomocou jedného (2, 2, 1)-pólu $B_2$ . . . . .	51

2.21	Grafické rozdelenie hrán rotačného binárneho snarku $G_4$ do tried pomocou jedného $(2, 2, 1)$ -pólu $B_3$ . . . . .	52
2.22	Grafické rozdelenie hrán rotačného binárneho snarku $G_5$ do tried pomocou jedného $(2, 2, 1)$ -pólu $B_4$ . . . . .	53
3.1	Vizualizácia 2-joinu grafov $G_1$ a $G_2$ . . . . .	60
3.2	Kompletný bipartitný graf na ôsmich vrchoch $K_{4,4}$ . . . . .	61
3.3	Kompletný bipartitný graf $K_{5,5}$ bez párenia $M$ . . . . .	62
3.4	Kompletný bipartitný graf $K_{6,6}$ bez dvoch disjunktných párení $M$ a $M'$ . . . . .	62
3.5	Graf $K_{6,6} - 2M$ je izomorfný s citadelou $T_{12}$ na 12 vrchoch . . . . .	63
3.6	Graf $K_{4,4} * K_{4,4}$ , ktorý vznikol operáciou 2-join dvoch kópií grafu $K_{4,4}$ . . . . .	63
3.7	Graf na 18 vrchoch, na ktorom sa nadobúda maximálny počet farbení . . . . .	64
3.8	$(4, 4)$ -pól $T$ . . . . .	70
3.9	Názorná ukážka spojenia dvoch $(4, 4)$ -pólov $T$ . . . . .	70
3.10	Konštrukcia citadely $T_n$ postupným spájaním $(4, 4)$ -pólov $T$ . . . . .	71
3.11	Jeden z komponentov $C_4$ grafu prechodov na $(4, 4)$ -póle $T$ . . . . .	73
3.12	Jeden z komponentov $G_8$ grafu prechodov na $(4, 4)$ -póle $T$ . . . . .	74

# Úvod

Mnohé známe hypotézy v teórii grafov, ako napríklad hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami, 5-toková hypotéza, Fan-Raspaudova hypotéza či Fulkersonova hypotéza je možné previesť na kubické grafy. Preto je postačujúce tieto hypotézy dokázať len pre kubické grafy. Z Vizingovej vety o hranových farbeniach vyplýva, že každý kubický graf je hranovo zafarbiteľný buď tromi, alebo štyrmi farbami. Nie je ťažké nahliadnuť, že pre kubické 3-zafarbiteľné grafy dané hypotézy platia. Tým pádom je trieda kubických grafov, ktoré nie sú hranovo 3-zafarbiteľné vhodná pre ďalšie skúmanie, nakoľko môže obsahovať potenciálne protipríklady daných hypotéz. Ukazuje sa, že aj medzi hranovo 3-nezafarbiteľnými kubickými grafmi existujú isté rozdiely vzhľadom na to, ako ťažké je pre ne dokázať tieto hypotézy.

V prvej časti našej diplomovej práce nadväzujeme na náš výskum z bakalárskej práce v tejto oblasti a pokračujeme vo výskume týkajúceho sa takzvanej Kászonyiho funkcie, ktorá ponúka isté charakteristiky pre hranovo 3-nezafarbiteľné kubické grafy. Túto funkciu zaviedol v roku 1972 maďarský matematik László Kászonyi [7, 8] a v roku 2013 ju spopularizoval Richard C. Bradley [3].

Kászonyiho funkcia  $\psi(G, e)$  hovorí koľko rôznych hranových 3-farbení existuje na kubickom grafe  $G$  po tom, ako na ňom potlačíme hranu  $e$ , pričom pod pojmom potlačenie hrany  $e$  máme na mysli odobratie danej hrany a vyhladenie incidentných vrcholov. Pod pojmom vyhladenie vrchola druhého stupňa rozumieme odobratie vrchola  $v$  a súčasné pridanie hrany medzi susednými vrcholmi vrchola  $v$ .

V našej práci určujeme hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G, e)$  pre ľubovoľnú hranu  $e$  každého grafu z nekonečnej triedy rotačných binárnych snarkov, ktoré konštruujú vo svojom článku Superposition of snarks E. Máčajová a M. Škoviera [9]. Rotačné binárne snarky sú prvou nekonečnou triedou snarkov, pre ktorú bolo určené, že napriek rastúcemu počtu vrcholov ostáva počet hrán s nenulovou hodnotou Kászonyiho funkcie konštantný a nenulový. To robí túto nekonečnú triedu snarkov význačnou v porovnaní s dvoma predošlými triedami snarkov, ktorým sme určili hodnoty Kászonyiho funkcie už v rámci bakalárskej práce.

V druhej časti našej práce skúmame maximálne počty hranových 4-farbení na jednoduchých 4-regulárnych grafoch, v závislosti od počtu vrcholov. Vychádzame pritom z článku Enumerating the edge-colourings and total colourings of a regular graph od

autorov S. Bessy a F. Havet [1]. V tomto článku autori dokazujú, že každý jednoduchý súvislý kubický graf na  $n$  vrchoch má najvyššie  $\frac{9}{4} \cdot 2^{n/2}$  hranových 3-farbení, pričom sa domnievajú, že tento odhad nie je tesný. Autori tiež konštruujú dve nekonečné triedy kubických grafov a formulujú hypotézu, že zjednotením týchto dvoch tried získame množinu grafov, na ktorých sa nadobúda maximálny počet hranových 3-farbení v závislosti od počtu vrcholov  $n$ .

Pomocou výpočtovej techniky sa nám podarilo určiť počet hranových 4-farbení na jednoduchých 4-regulárnych grafoch do 18 vrcholov. Ako  $\text{MAX}_c(n)$  definujeme funkciu, ktorá určuje maximálny počet hranových 4-farbení na jednoduchých 4-regulárnych grafoch v závislosti od počtu vrcholov  $n$ . Pozorovaním súvislostí medzi grafmi s maximálnym počtom 4-farbení do 18 vrcholov sme sformulovali hypotézu, že graf, ktorý získame buď ako postupný 2-join niekoľkých menších grafov, u ktorých sa nadobúda maximálny počet hranových farbení, alebo je reprezentantom jednej špecifickej nekonečnej triedy 4-regulárnych grafov, má počet hranových 4-farbení blízko hodnote funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ . Špecifickú triedu grafov definujeme ako triedu grafov – *citadiel*  $T_n$  a pod pojmom 2-join máme na mysli operáciu, pri ktorej vznikne taký graf  $G = G_1 * G_2$ , že odoberieme zo súvislých grafov  $G_1$  a  $G_2$  po jednej hrane a súčasne spojíme vrcholy incidentné s jednou z týchto hrán dvoma novými hranami tak, aby výsledkom bol súvislý graf.

Následne pomocou myšlienok vychádzajúcich z dynamického programovania dokážeme, že pre  $n \geq 20$  má graf *citadela*  $T_n$  viac hranových 4-farbení ako graf, ktorý vznikne ako 2-join niekoľkých menších grafov, u ktorých vieme, že sa na nich dosahuje hodnota funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ , alebo sú tiež citadelou, len na menej vrchoch.

Výsledkom nášho výskumu v tejto oblasti je nekonečná trieda 4-regulárnych grafov – *citadiel*, ktorá ponúka kvalitný netriviálny dolný odhad hodnôt funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ . Súčasťou našej práce je aj dôkaz počtu hranových 4-farbení pre ľubovoľný graf z tejto nekonečnej triedy grafov.



# Kapitola 1

## Úvod do problematiky Kászonyiho funkcie

Prvá časť diplomovej práce týkajúca sa výskumu Kászonyiho funkcie nadväzuje na našu bakalársku prácu. Cieľom tejto úvodnej kapitoly je zosumarizovať známe výsledky ohľadom Kászonyiho funkcie, vychádzajúc predovšetkým z prehľadového článku od Richarda C. Bradleyho [3]. Autor vo svojom článku zasadzuje práce L. Kászonyiho [7, 8] do širšieho kontextu a ponúka otvorené problémy na ďalšie skúmanie. V závere tejto kapitoly ponúkame prehľad našich výsledkov z bakalárskej práce týkajúci sa Kászonyiho funkcie. V nasledujúcej kapitole sa potom venujeme novému výskumu, kde už v rámci samotnej diplomovej práce určíme hodnoty Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  pre ľubovoľnú hranu  $e$  každého rotačného binárneho snarku  $G_i$ .

V našej práci predpokladáme, že čitateľ pozná základné pojmy z teórie grafov. Avšak, ak by sa mu stalo, že si v nejakom momente nie je istý definíciou nejakého základného pojmu, odporúčame mu nahliadnuť do knihy o teórii grafov od R. Diestela [5]. Súčasne sa v našej práci stretne aj s pojmami a definíciami, o ktorých sa domnievame, že nepatria k základným pojmom teórie grafov. Takéto pojmy zvyčajne definujeme, keď s nimi prídeme prvý raz do styku. V práci tiež pracujeme s dvoma všeobecnými pojmami, ktoré si zadefinujeme ešte predtým, ako prejdeme k samotnej Kászonyiho funkcii. Začneme definíciou pojmu graf, ktorý je v rámci našej práce zadefinovaný o niečo všeobecnejšie ako je zvykom. Takáto definícia grafu v sebe zahŕňa aj takzvané *multipóly* – objekty s visiacimi hranami, výhodné na definovanie komplexnejších grafov, ako aj pri skúmaní samotného počtu hranových farbení na väčších grafoch.

Pojem *graf*  $G = (V, E)$  chápeme ako dvojicu skladajúcu sa z konečnej množiny vrcholov  $V$  a z konečnej množiny hrán  $E$ , pričom pojem *hrana* chápeme voľnejšie ako zvyčajne.

Každá hrana má dva *konce*, ktoré môžu byť *incidentné* s nejakým vrcholom, *voľné* alebo *navzájom spojené*. Na základe tohto rozšírenia pojmu hrany definujeme dva typy hrán: *riadna hrana* je hrana incidentná s dvoma rôznymi vrcholmi a *visiaca hrana* je hrana, ktorá má jeden koniec incidentný s vrcholom a druhý koniec voľný.

Pod pojmom *polhrana* máme zase na mysli voľný koniec hrany, ktorý nie je incidentný so žiadnym vrcholom.

Z grafu  $G$  s neprázdnu množinou visiacych hrán vytvoríme *multipól* tak, že jeho polhrany rozdelíme do navzájom disjunktných množín – *konektorov*. Každý konektor  $S_i$  je lineárne usporiadaný, teda poradie polhrán v konektoroch je pevné.

Zoberme si teraz ľubovoľný multipól  $M$ , ktorý má  $n$  konektorov  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , a nech tieto konektory obsahujú postupne  $k_1, k_2, \dots, k_n$  polhrán. Potom multipól  $M$  zvykneme označovať aj ako  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ -pól.

Ak má multipól len dva konektory, zvykneme ich rozlišovať ako *vstupný* konektor  $S_1$  a *výstupný* konektor  $S_2$ .

Na záver sa ešte pristavíme pri *zafarbení konektoru*. Každé hranové  $k$ -farbenie  $c$  multipólu  $M$  priraduje ľubovoľnému jeho konektoru  $S$  usporiadanú  $n$ -ticu farieb. Túto usporiadanú  $n$ -ticu nazývame zafarbením konektoru  $S$ . Formálne ak  $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , potom  $c(S) = (c(e_1), c(e_2), \dots, c(e_n))$ .

## 1.1 Vlastnosti a výsledky v oblasti výskumu Kászonyiho funkcie

V úvodnej podkapitole zosumarizujeme vlastnosti Kászonyiho funkcie, pričom vychádzame primárne z prehľadového článku od Richarda C. Bradleyho [3]. Spomenieme aj výsledky týkajúce sa tejto oblasti od autoriek Ariana Cappon a Emily Walther z článku Prime Factorization of Kászonyi [4].

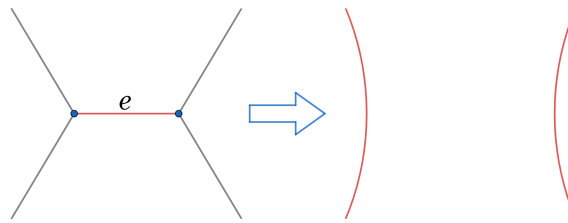
Začneme tým, že zdefinujeme zopár pojmov úzko spätých s Kászonyiho funkciou a definíciou Kászonyiho funkcie.

Pod *vyhladením* vrchola  $v$  druhého stupňa dva máme na mysli odobratie vrchola  $v$  spolu s incidentnými hranami a súčasné pridanie riadnej hrany medzi susednými vrcholmi vrchola  $v$ .

Zoberme si riadnu alebo visiacu hrana  $e$ , ktorá je incidentná s vrcholmi (vrcholom) tretieho stupňa. Potom pod *potlačením hrany*  $e$  máme na mysli odobratie hrany  $e$  a následné vyhladenie vrcholov (vrchola) druhého stupňa (pozri obrázok 1.1). Graf, ktorý vznikne potlačením hrany  $e$  na grafe  $G$  značíme ako  $G \sim e$ .

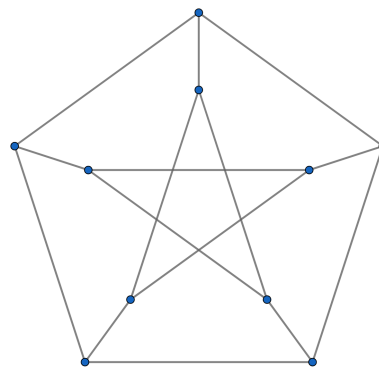
Na záver nahliadnime, že ak potlačíme hrana na kubickom grafe, tak výsledný graf

je opäť kubický.



Obr. 1.1: Potlačenie hrany  $e$

Pojem *snark* definujeme ako kubický hranovo 3-nezafarbiteľný graf. Asi najznámejším snarkom je takzvaný *Petersenov graf* (pozri obrázok 1.2), ktorý je tiež najmenším jednoduchým snarkom. Nie je prekvapivé, že práve Petersenov graf je prvým snarkom, ktorému bola určená hodnota Kászonyiho funkcie pre každú z jeho hrán. Spravil tak samotný autor Kászonyiho funkcie L. Kászonyim v svojom článku *On the nonplanarity of some cubic graphs* [7] (pozri tvrdenie 1.1.2).



Obr. 1.2: Petersenov graf ako najmenší jednoduchý snark

Samotnú *Kászonyiho funkciu*  $\psi(G, e)$  potom definujeme ako počet rôznych hranových 3-farbení na kubickom grafe  $G \sim e$  predelený hodnotou 18.

Na prvý pohľad sa môže javiť hodnota 18 pomerne arbitrárna, skrýva však v sebe hlbší význam. Ideou autora za takouto definíciou Kászonyiho funkcie bolo spraviť hodnoty Kászonyiho čo najvýstižnejšie, a to tak, že ich pozbavíme akýchkoľvek zbytočných konštánt. Počet hranových 3-farbení každého kubického grafu je hodnota deliteľná číslom šesť, čo vyplýva z permutácií farieb. Vo svojich prácach L. Kászonyi tiež dokazuje Tvrdenie 1.1.1, z ktorého vyplýva, že počet hranových 3-farbení bez uvažovania permutácií farieb na grafe  $G \sim e$ , ktorý vznikol z nejakého snarku  $G$  je deliteľný číslom tri. Preto je počet hranových 3-farbení ľubovoľného grafu  $G \sim e$ , ktorý vznikol zo snarku

$G$  násobkom čísla 18. Táto konštanta zrejme nemá žiadnu výpovednú hodnotu o charaktere samotného grafu  $G \sim e$ .

Vo zvyšku tejto podkapitoly sumarizujeme tvrdenia L. Kászonyiho z prehľadového článku R. C. Bradleyho. Uvedieme aj jeden súčasný a pomerne zaujímavý výsledok od autoriek A. Cappon a E. Walther. Začneme tým, že si zadefinujeme pojem, ktorý sa v jednom z tvrdení vyskytuje.

Hovoríme, že *hranová 3-dekompozícia* grafu  $G$  je také rozdelenie hrán grafu  $G$  do troch disjunktných tried, že každá trieda hrán tvorí perfektné párenie.

**Tvrdenie 1.1.1.** [7, 8] *Nech  $G \sim e$  je graf, ktorý vznikne zo snarku  $G$  potlačením hrany  $e$  a nech  $d_1, d_2$  sú tie hrany, ktoré vzniknú potlačením hrany  $e$ . Ďalej nech  $\alpha(G \sim e)$  je množina všetkých hranových farbení grafu  $G \sim e$  (vrátane permutácií farieb) a nech  $\delta(G \sim e)$  je množina všetkých hranových 3-dekompozícií takých, že hrany  $d_1, d_2$  patria do rovnakej triedy. Potom existuje prirodzené číslo  $L$  také, že:*

$$(i) |\alpha(G \sim e)| = 18L,$$

$$(ii) |\delta(G \sim e)| = L,$$

(iii) *nech  $a, b$  sú dve (môžu byť aj rovnaké) farby a nech  $\gamma(G \sim e)$  je množina všetkých hranových 3-farbení  $c$  grafu  $G \sim e$  takých, že  $c(d_1) = a, c(d_2) = b$ . Potom  $|\gamma(G \sim e)| = 2L$ .*

Nasleduje tvrdenie, ktoré určuje počet hranových farbení najmenšieho snarku.

**Tvrdenie 1.1.2.** [7] *Hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G, e)$  pre ľubovoľnú hranu Petersenovho grafu  $G$  je  $\psi(G, e) = 1$ .*

Na záver z tvrdení L. Kászonyiho vyslovíme ešte jedno tvrdenie, ktoré neskôr využijeme pri dôkaze hodnôt Kászonyiho funkcie pre rotačné binárne snarky.

**Tvrdenie 1.1.3.** [7, 8] *Nech  $H$  je súvislý podgraf snarku  $G$ , ktorý vznikol ako zjednotenie niekoľkých 5-cyklov. Potom hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G, e)$  je pre všetky hrany  $e \in E(H)$  rovnaká.*

Teraz prejdime ešte k súčasnému výsledku skúmania vlastností Kászonyiho funkcie. Toto tvrdenie bolo pôvodne formulované v článku R. C. Bradleyho ako hypotéza, ktorá už bola medzičasom dokázaná ako dôsledok ešte silnejšieho tvrdenia. Preto ju uvádzame ako dokázané tvrdenie:

**Tvrdenie 1.1.4.** *Pre každé dve prirodzené čísla  $j, k$  existuje snark  $G$  a hrana  $e$  taká, že  $\psi(G, e) = 2^j \cdot 3^k$ .*

Tvrdenie je dôsledkom silnejšieho tvrdenia, ktoré dokázali autorky Ariana Cappon a Emily Walther v článku Prime Factorization of Kászonyi Numbers [4].

**Tvrdenie 1.1.5** (Cappon, Walther). [4]

Nech  $\mathbb{P}$  je množina prvočísel  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$ , pričom  $\mathbb{P}_1 = \{p \in \mathbb{N}_{149} \mid p \text{ je prvočíslo}\}$  a  $\mathbb{P}_2 = \{173, 179, 181, 197, 229, 257, 271, 359\}$ .

Potom pre každé prirodzené číslo  $n$  tvaru

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p}, \quad k_p \in \mathbb{N}$$

existuje snark  $G$  a hrana  $e$  taká, že Kászonyiho funkcia  $\psi(G, e)$  pre danú dvojicu  $(G, e)$  nadobúda hodnotu  $\psi(G, e) = n$ .

## 1.2 Isaacsove a zovšeobecnené Blanušove snarky

Cieľom tejto podkapitoly je zosumarizovať naše výsledky ohľadom Kászonyiho funkcie z bakalárskej práce [11], nech môže táto práca poslúžiť aj ako miesto, na ktorom je možné nájsť ucelené výsledky nášho štvorročného výskumu. Výskum z bakalárskej práce sa týkal určenia hodnôt Kászonyiho funkcie pre takzvané Isaacsove snarky a zovšeobecnené Blanušove snarky. Táto podkapitola zahŕňa popis týchto dvoch nekonečných tried snarkov, nasledovaný tvrdeniami, ktoré určujú hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G, e)$  pre ľubovoľnú hranu každého z týchto snarkov. Dôkazy tvrdení je možné nájsť v našej bakalárskej práci.

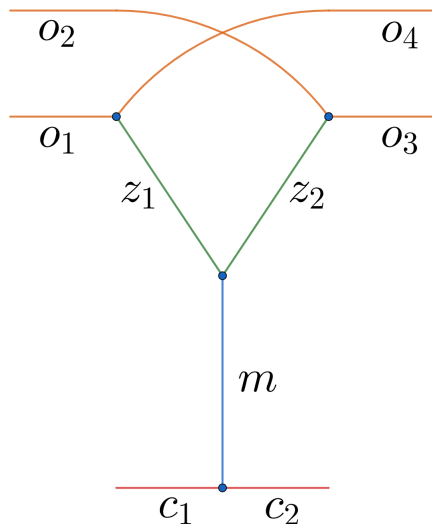
Nekonečná trieda *Isaacsových snarkov*, známa tiež pod názvom *flower snarks* bola skonštruovaná roku 1975 americkým matematikom Rufusom Isaacsom v článku Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not Tait colorable [6].

V odbornej literatúre je možné nájsť rôzne ekvivalentné definície nekonečnej triedy Isaacsových snarkov. My sme sa aj kvôli dobrej vizuálnej predstave rozhodli uviesť definíciu Isaacsových snarkov ako grafov, ktoré vzniknú spojením niekoľkých takzvaných *Isaacsových (3, 3)-pólov*  $Y$ . Samotný Isaacsov (3, 3)-pól  $Y$  je možné si pozrieť na obrázku 1.3.

Teraz zdefinujeme operáciu *spojenia (k, k)-pólov*, pomocou ktorej budeme spájať (3, 3)-póly  $Y$  do výsledného Isaacsovho snarku  $J_n$ .

Nech  $M$  a  $N$  sú dva ľubovoľné  $(k, k)$ -póly. Potom hovoríme, že  $(k, k)$ -pól  $M \circ N$  vznikol *spojením*  $(k, k)$ -pólov  $M$  a  $N$  ak vznikne tak, zlúčime visiace hrany na výstupnom konektore  $S_2$  patriaceho  $(k, k)$ -pólu  $M$  s visiacimi hranami na vstupnom konektore  $S_1$  patriaceho  $(k, k)$ -pólu  $N$  v poradí, v akom sú usporiadané na konektoroch.

Ďalej nech  $M$  je ľubovoľný  $(k, k)$ -pól. Potom hovoríme, že graf  $G$  vznikne ako *uzáver*  $(k, k)$ -pólu  $M$ , ak spojíme visiace hrany na jeho vstupnom konektore s visiacimi



Obr. 1.3: Isaacsov (3, 3)-pól  $Y$  a farebná vizualizácia priradenia jeho hrán do tried

hranami na jeho výstupnom konektore v poradí, v akom sú usporiadané na konekto-roch.

Ako *Isaacsov snark*  $J_n$  chápeme snark, ktorý vznikne ako uzáver (3, 3)-pólu  $Y^n$ , ktorý vznikol postupným spojením nepárneho počtu  $n$  Isaacsových (3, 3)-pólov  $Y$ .

Pre potreby určenia hodnôt Kászonyiho funkcie na Isaacsových snarkoch definujeme rozdelenie hrán Isaacsovho snarku do štyroch tried. Na to zadefinujeme Isaacsove snarky ešte jedným, možno intuitívne menej uchopiteľným spôsobom. Tento spôsob v sebe rovno zahŕňa rozdelenie hrán do tried.

Nech  $n$  je nepárne prirodzené číslo. Potom snark  $J_n = (V_n, E_n)$  nazývame Isaacso-vým snarkom, pričom množinu vrcholov  $V_n$  definujeme ako  $V_n = \{a_i, b_i, c_i, d_i \mid i \in \mathbb{N}_0; i < n\}$  a množinu hrán  $E_n = C_n \cup M_n \cup Z_n \cup O_n$  chápeme ako zjednotenie štyroch tried hrán  $C_n$ ,  $M_n$ ,  $Z_n$  a  $O_n$ , ktoré definujeme ako:

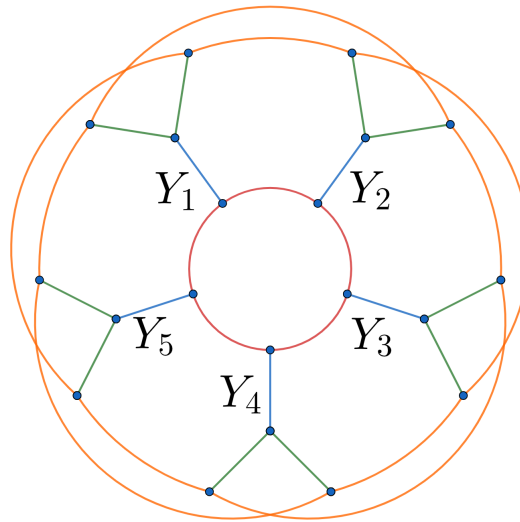
$$C_n = \{a_i a_j \mid i, j \in \mathbb{N}_0; i < n, j = i + 1 \pmod{n}\}$$

$$M_n = \{a_i b_i \mid i \in \mathbb{N}_0; i < n\}$$

$$Z_n = Z'_n \cup Z''_n, \text{ pričom } Z'_n = \{b_i c_i \mid i \in \mathbb{N}_0; i < n\} \text{ a } Z''_n = \{b_i d_i \mid i \in \mathbb{N}_0; i < n\}$$

$$O_n = O'_n \cup O''_n, \text{ pričom } O'_n = \{c_i d_j \mid i, j \in \mathbb{N}_0; i < n, j = i + 1 \pmod{n}\} \text{ a } O''_n = \{c_i d_j \mid i, j \in \mathbb{N}_0; i < n, j = i - 1 \pmod{n}\}$$

Triedu  $C_n$  chápeme ako triedu *červených hrán* Isaacsovho snarku, zatiaľ čo triedy  $M_n$ ,  $Z_n$ ,  $O_n$  chápeme (v tomto poradí) ako triedy *modrých*, *zelených* a *oranžových hrán* Isaacsovho snarku. Názvy hrán jednotlivých tried vychádzajú z farebnej vizualizácie na obrázku 1.4, ktorý vizualizuje aj priradenie jednotlivých hrán Isaacsovho snarku  $J_5$  do týchto štyroch tried. Teraz môžeme vysloviť tvrdenie, ktoré určuje hodnoty Kászonyiho funkcie pre Isaacsove snarky.



Obr. 1.4: Isaacsov snark  $J_5$  a farebná vizualizácia priradenia jeho hrán do štyroch tried

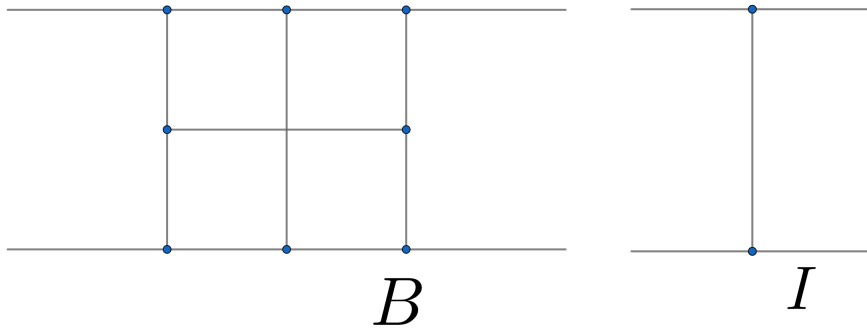
**Tvrdenie 1.2.1.** [11] *Nech  $J_n$  je ľubovoľný Isaacsov snark a nech  $e$  je jeho hrana. Potom v závislosti od toho, do ktorej triedy hrán patrí hrana  $e$  je hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(J_n, e)$  nasledovná:*

- $\psi(J_n, e) = (2^{n-1} - 4)/6$ , ak  $e \in C_n$  je červená hrana,
- $\psi(J_n, e) = (2^{n-1} + 2)/3$ , ak  $e \in M_n$  je modrá hrana,
- $\psi(J_n, e) = (2^{n-1} - 1)/3$ , ak  $e \in Z_n$  je zelená hrana,
- $\psi(J_n, e) = (2^{n-1} + 2)/6$ , ak  $e \in O_n$  je oranžová hrana.

*Poznámka 1.2.2.* Určením hodnoty Kászonyiho funkcie pre ľubovoľnú hranu každého Isaacsovho snarku sme vyriešili otvorený problém, ktorý R. C. Bradley formuloval vo svojom prehľadovom článku ako problém 5. na strane 35 [3].

Prejdime teraz ešte k zovšeobecneným Blanušovým snarkom. Po Petersenovom grafe sú dva Blanušove snarky [2] na 18 vrcholoch dvoma najmenšími snarkami (vzhľadom na počet vrcholov). Zovšeobecnením konštrukcie týchto dvoch snarkov roku 1989 John J. Watkins skonštruoval nekonečnú triedu takzvaných *zovšeobecnených Blanušových snarkov* [10]. Nasleduje definícia tejto nekonečnej triedy snarkov a tvrdenie, ktoré určuje hodnotu Kászonyiho funkcie pre ľubovoľnú hranu každého z týchto snarkov.

Zovšeobecnené Blanušove snarky si zdefinujeme ako spojenie niekoľkých základných multipólov. Jedným z nich je takzvaný *Blanušov (2, 2)-pól B*, ktorý definujeme pomocou obrázku 1.5 a druhým je takzvaný *(2, 2)-pól I*, ktorý je tiež na obrázku 1.5).

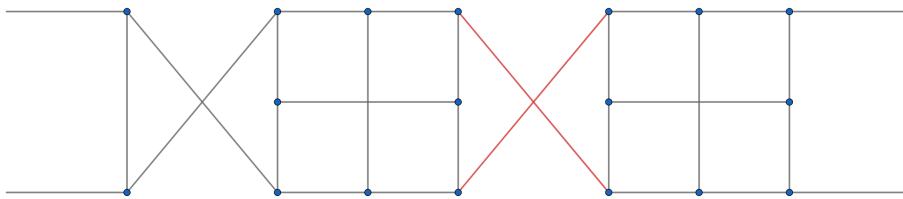
Obr. 1.5: Blaušov (2, 2)-pól  $B$  (vľavo) a (2, 2)-pól  $I$ 

Pomocou *asymetrického súčinnu*  $(k, k)$ -pólov, ktorý teraz zdefinujeme, spájame (2, 2)-póly  $B$  do výsledného zovšeobecneného Blaušovho snarku.

Nech  $M$  a  $N$  sú dva ľubovoľné (2, 2)-póly. Potom hovoríme, že (2, 2)-pól  $M \otimes N$  vznikol *asymetrickým súčinnom* (2, 2)-pólov  $M$  a  $N$  ak vznikne tak, zlúčime visiaci hrany na výstupnom konektore  $S_2$  (2, 2)-pólu  $M$  s visiacimi hranami na vstupnom konektore  $S_1$   $(k, k)$ -pólu  $N$  v opačnom poradí. Presnejšie, ak výstupný konektor  $S_2$  (2, 2)-pólu  $M$  má hrany  $S_2 = (g, h)$  a vstupný konektor  $S_1$  (2, 2)-pólu  $N$  má hrany  $S_1 = (e, f)$ , potom spájame pri asymetrickom súčine hrany  $g * f$  a  $h * e$ .

*Zovšeobecnený Blaušov snark*  $\tilde{B}_n$  je snark, ktorý vznikne ako uzáver (2, 2)-pólu  $I \otimes B^n$ , ktorý zase vznikne ako postupný asymetrický súčin jedného (2, 2)-pólu  $I$  a  $n$  Blaušových (2, 2)-pólov  $B$  (pozri obrázok 1.6).

Hrany zovšeobecneného Blaušovho snarku, ktoré vznikli spojením visiacich hrán medzi dvoma Blaušovými (2, 2)-pólmi operáciou asymetrického súčinnu nazývame *spájajúce hrany* (na obrázku 1.6 sú vyznačené červenou farbou).



Obr. 1.6: Postupná konštrukcia zovšeobecneného Blaušovho snarku

**Tvrdenie 1.2.3.** [11] Nech  $\tilde{B}_n$  je ľubovoľný zovšeobecnený Blaušov snark a nech  $e$  je jeho hrana. Potom pre hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(\tilde{B}_n, e)$  platí:

- $\psi(\tilde{B}_n, e) = 3 \cdot 2^{n-2}$ , ak  $e$  je spájajúca hrana,
- $\psi(\tilde{B}_n, e) = 2^{n-1}$  inak.



## Kapitola 2

# Kászonyiho funkcia a rotačné binárne snarky

Cieľom tejto kapitoly je určiť hodnoty Kászonyiho funkcie pre nekonečnú triedu *rotačných binárnych snarkov*, ktorej konštrukcia vychádza z článku Superposition of snarks od E. Máčajovej a M. Škovieru [9]. Na úvod kapitoly zdefinujeme (rotačné) binárne snarky a popíšeme konštrukciu nekonečnej triedy rotačných binárnych snarkov zo spomínaného článku. Spomenieme tiež (bez dôkazu) niektoré ich vlastnosti. Následne určíme hodnoty Kászonyiho funkcie pre tieto grafy, čo je hlavným cieľom tejto kapitoly. Ak má čitateľ záujem o lepšie pochopenie, prípadne by chcel skúmať iné vlastnosti týchto rotačných binárnych snarkov odporúčame mu nahliadnúť do samotného článku Superposition of snarks [9].

### 2.1 Rotačné binárne snarky

Hovoríme, že strom  $T$ , ktorý obsahuje len vrcholy stupňa 3 a 1 je *vybalansovaný strom stupňa 3*, ak v ňom existuje taký vrchol  $r$ , že všetky listy (vrcholy stupňa 1) majú od neho rovnakú vzdialenosť. Vrchol  $r$  potom nazývame *koreňom* stromu  $T$  a vzdialenosť medzi koreňom a ľubovoľným listom nazývame *hlĺbka* stromu  $T$ . Vybalansovaný strom stupňa 3 hlĺbky  $d$  značíme ako  $T_d$ . Môžeme nahliadnúť, že po odobratí koreňa  $r$  dostávame tri kópie perfektných binárnych stromov na  $2^d - 1$  vrcholoch. Preto na strome  $T_d$  existuje automorfizmus, ktorý zachováva polohu koreňa  $r$  a cyklicky permutuje hrany incidentné s koreňom  $r$ . Tento automorfizmus nazývame aj *rotačný automorfizmus*.

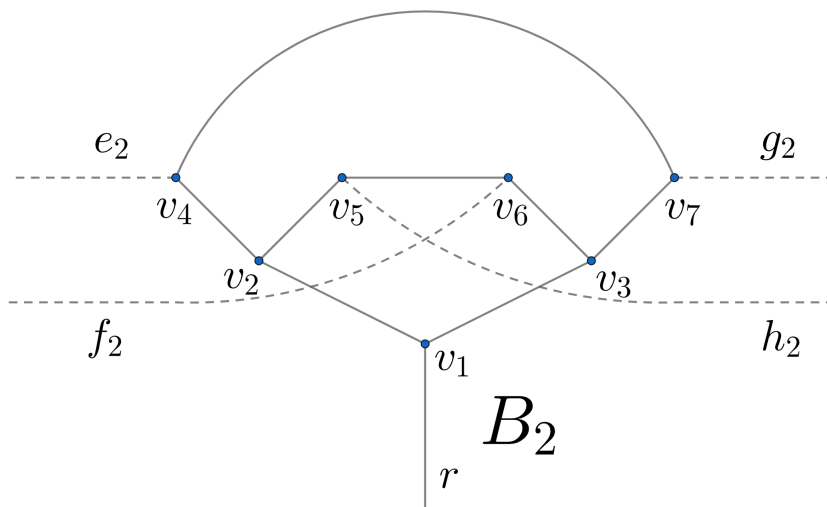
O snarku  $G$  hovoríme, že je *binárny snark*, ak na ňom existuje taká kostra  $T$ , ktorá je vybalansovaným stromom stupňa 3. Nech má táto kostra hlĺbku  $d$ . Potom snark  $G$  nazývame tiež  $T_d$ -snarkom. Množinu všetkých takýchto snarkov nazývame *binárne snarky*.

Zoberme si binárny snark  $G$ , ktorý obsahuje kosťru  $T$  izomorfnú s vybalansovaným stromom  $T_d$  pre nejaké  $d$ . Ďalej nech na tomto grafe existuje automorfizmus  $\rho \in \text{Aut}(G)$  taký, že jeho zúženie na kosťru  $T$  je rotačným automorfizmom. Potom hovoríme, že graf  $G$  je *rotačný binárny snark* a automorfizmus  $\rho$  nazývame *rotačný automorfizmus*.

Autori E. Máčajová a M. Škoviera vo svojom článku konštruujú nekonečnú triedu cyklicky hranovo 5-súvislých rotačných binárnych snarkov  $\mathcal{T}$  takú, že pre každé  $d \geq 2$  existuje v tejto triede jeden  $T_d$ -snark.

Teraz bude naším cieľom popísať samotnú konštrukciu grafov triedy  $\mathcal{T}$ , aby sme sa následne mohli zaoberať vlastným výskumom na týchto grafoch. Nakoľko sa v našej práci zaoberáme skúmaním hodnôt Kászonyiho funkcie, uvedieme konštrukciu bez dôkazu cyklickej hranovej 5-súvislosti a hranovej 3-nezafarbiteľnosti. Dôkaz je možné nájsť v samotnom článku Superposition of snarks [9].

Začneme tým, že zdefinujeme základný stavebný blok týchto grafov, takzvaný Petersenov negátor  $B_2$ . Následne popíšeme spôsob, akým môžeme induktívne skonštruovať  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_i$  vyšších rádo. Na záver ukážeme, ako pre ľubovoľné  $i \geq 2$  skonštruujeme z troch kópií  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  snark  $G_{i+1} \in \mathcal{T}$ .



Obr. 2.1: Petersenov negátor  $B_2$ .

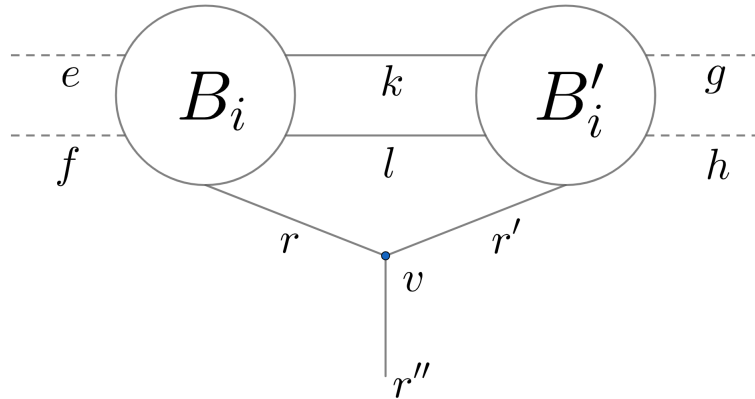
Zoberme si Petersenov graf  $G$  (pozri obrázok 1.2) a ľubovoľnú cestu na troch jeho vrcholoch, ktoré postupne nazveme  $v_i$ ,  $v_{ii}$  a  $v_{iii}$ . Potom  $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne odobratím týchto vrcholov nazývame *Petersenov negátor*  $B_2$  (pozri obrázok 2.1).

Dve visiace hrany, ktoré boli pôvodne incidentné s vrcholom  $v_i$  tvoria *vestupný (ľavý) konektor*  $S_1$  a dve visiace hrany pôvodne incidentné s vrcholom  $v_{iii}$  tvoria *výstupný (pravý) konektor*  $S_2$ . Visiaca hrana pôvodne incidentná s vrcholom  $v_{ii}$  tvorí *reziduálny konektor*  $S_3$ .

Na obrázku 2.1 tvoria visiace hrany  $S_1 = (e_2, f_2)$  vstupný (ľavý) konektor  $S_1$ , hrany  $S_2 = (g_2, h_2)$  výstupný (pravý) konektor  $S_2$  a visiaca hrana  $r$  tvorí reziduálny konektor  $S_3$ . Tohto názvoslovía sa budeme držať aj neskôr pri analyzovaní farbení na tomto  $(2, 2, 1)$ -póle.

*Poznámka 2.1.1.* Nahliadnime, že na Petersenovom negátore  $B_2$  existuje automorfizmus  $\rho \in \text{Aut}(B_2)$  taký, že navzájom transformuje hrany vstupného a výstupného konektora pričom zachováva reziduálny konektor, teda  $\rho(S_1) = S_2$ ,  $\rho(S_2) = S_1$ ,  $\rho(S_3) = S_3$ . Vizuálne si tento automorfizmus môžeme predstaviť ako osovú súmernosť na obrázku 2.1 podľa osi  $r$ .

Toto pozorovanie využijeme neskôr, keď budeme rozoberať možné hranové 3-farbenia na Petersenovom negátore. Umožní nám to znížiť počet prípadov, ktoré budeme musieť manuálne rozobrať. Nateraz však budeme pokračovať v definovaní operácií potrebných na zdefinovanie triedy rotačných binárnych snarkov  $\mathcal{T}$ .



Obr. 2.2: Konštrukcia  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i+1} = B_i \odot B'_i$  z dvoch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_i$  a  $B'_i$ .

Zoberme si  $(k, l, 1)$ -pól  $M = M(S_1, S_2, (r))$  a  $(l, m, 1)$ -pól  $M' = M'(S'_1, S'_2, (r'))$ . Nech  $M'' = M \odot M'$  je  $(k, m, 1)$ -pól, ktorý vznikol tak, že zoberieme multipóly  $M$  a  $M'$ , izolovaný vrchol  $v$ , zlúčime konektory  $S_2$  a  $S'_1$  a napojíme visiace hrany  $r$  a  $r'$  a novú visiacu hranu  $r''$  na vrchol  $v$ . Potom hovoríme, že  $M'' = M \odot M'$  vznikol spojením  $(2, 2, 1)$ -pólov  $M$  a  $M'$ . Jeho vstupným konektorom je konektor  $S_1$ , výstupným konektorom je konektor  $S'_2$  a reziduálny konektor tvorí visiaca hrana  $r''$ . Vizualizácia operácie je na obrázku 2.2 s  $(2, 2, 1)$ -pólmi  $B_i$  a  $B'_i$  miesto  $M$  a  $M'$ .

Zvykneme tiež hovoriť, že  $(k, l, 1)$ -pól  $M$  spájame *zľava* s  $(l, m, 1)$ -pólom  $M'$ , respektíve, že  $(l, m, 1)$ -pól  $M'$  spájame *sprava* s  $(k, l, 1)$ -pólom  $M$ .

*Poznámka 2.1.2.* Nahliadnime, že ak spojíme dve kópie  $(2, 2, 1)$ -pólu  $M = M(S_1, S_2, (r))$  takého, že na ňom existuje automorfizmus  $\rho \in \text{Aut}(M)$  taký, že navzájom transformuje

hrany vstupného a výstupného konektora pričom zachováva reziduálny konektor, teda  $\rho(S_1) = S_2$ ,  $\rho(S_2) = S_1$  a  $\rho(r) = r$ , tak potom aj na  $(2, 2, 1)$ -póle  $M' = M \odot M$ ,  $M' = (S'_1, S'_2, (r'))$  existuje automorfizmus  $\rho' \in \text{Aut}(M')$  taký, že  $\rho(S'_1) = S'_2$ ,  $\rho(S'_2) = S'_1$  a  $\rho(r') = r'$ .

Toto pozorovanie využijeme neskôr, keď budeme rozoberať možné hranové 3-farbenia na  $(2, 2, 1)$ -póloch  $B_i$  vyššieho rádu ako  $B_2$ , ktoré si teraz pomocou operácie spojenia  $(2, 2, 1)$ -pólov induktívne zdefinujeme.

**Definícia 2.1.3** ( $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i$ ). Pre  $i = 2$  ako  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2$  definujeme Petersenov negátor.

Pre  $i \geq 3$  definujeme  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i$  nasledovným induktívnym spôsobom: predpokladajme, že vieme skonštruovať  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}$ . Potom  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i = B_{i-1} \odot B_{i-1}$  definujeme ako spojenie dvoch kópií  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}$ .

Ak si odmyslíme visiace hrany a predstavíme si Petersenov negátor  $B_2$  ako list binárneho stromu s vychádzajúcou hranou  $r$ , môžeme si všimnúť, že každý  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i$  pre  $i \geq 3$  je v podstate binárny strom, ktorého koreňom je vrchol  $v$ , ktorý ako svojho ľavého a pravého syna obsahuje  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_{i-1}$ . Preto môžeme  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i$  chápať aj ako binárny strom hĺbky  $i - 2$ , ktorý ako listy má Petersenove negátory.

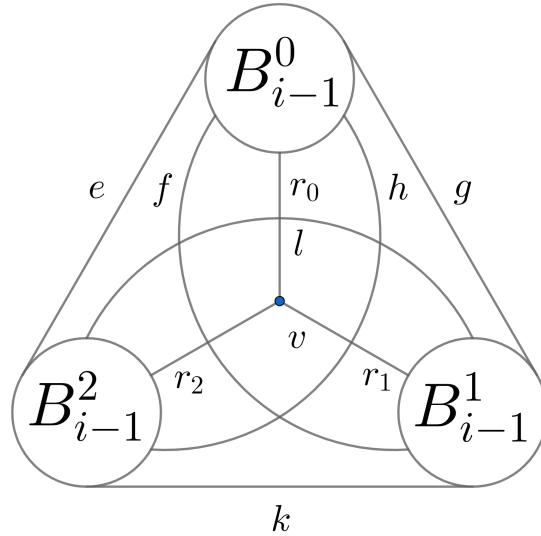
Vďaka tomuto pozorovaniu vieme ľubovoľnému  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_j$ ,  $j < i$ , ktorý je podgrafom  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  priradiť jednoznačnú postupnosť rozhodnutí vľavo/vpravo, ktoré robíme na ceste od koreňa  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  až ku koreňu  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_j$ . Pomocou týchto postupností potom vieme pre fixné  $j < i$  v rámci  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  zoradiť všetky  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_j$  do postupnosti od najľavejšieho po najpravejší (usporiadame ich podľa postupností rozhodnutí vľavo/vpravo). To nám umožňuje efektívnym spôsobom poukázať na ľubovoľný vrchol alebo hranu v  $(2, 2, 1)$ -póle  $B_i$ .

**Definícia 2.1.4.** Majme  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i$  pre  $i \geq 3$ , číslo  $j$  také, že  $2 \leq j < i$  a kladné celé číslo  $k$ . Potom (ak existuje) máme pod značením  $B_i(j)[k]$  na mysli  $k$ -ty najľavejší  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_j$ , ktorý je podgrafom  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$ . Analogickým spôsobom definujeme  $B_i(j)[-k]$  ako  $k$ -ty najpravejší  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_j$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$ .

Pod značením  $v = v(B_i(j)[k])$  máme na mysli vrchol  $v$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$ , ktorý je koreňom  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i(j)[k]$ .

Na vrcholy v  $(2, 2, 1)$ -póle  $B_i$ , ktoré sú súčasťou niektorého Petersenovho negátoru vieme poukázať tak, že si najprv vyberieme konkrétny Petersenov negátor  $B_i(2)[k]$ , a následne v rámci neho už postupujeme podľa značenia vrcholov z obrázka 2.1.

Na jednotlivé hrany  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  je možné sa odvolávať pomocou oboch vrcholov, s ktorými sú incidentné. To nám umožní zdefinovať Kászonyiho funkciu  $\psi(e, G_{i+1})$  pre ľubovoľnú hranu  $e$  ľubovoľného rotačného binárneho snarku  $G_{i+1}$ , ktorý ako hneď uvidíme je len vhodným spojením troch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_i$  a izolovaného vrcholu.



Obr. 2.3: Rotačný binárny snark  $G_i$  ako spojenie troch (2, 2, 1)-pólov  $B_{i-1}$ .

**Definícia 2.1.5** (Rotačný binárny snark  $G_{i+1}$  a trieda  $\mathcal{T}$ ). Zoberme si tri kópie  $B_i^0$ ,  $B_i^1$  a  $B_i^2$  (2, 2, 1)-pólu  $B_i$  pre  $i \geq 2$  a izolovaný vrchol  $v$ . Označme si visiace hrany na konektoroch nasledovne:  $B_i^k = B_i^k((e^k, f^k), (g^k, h^k), (r^k))$  pre  $0 \leq k \leq 2$ . Potom výsledný rotačný binárny snark  $G_{i+1}$  vznikne tak, že spojíme hrany  $g_i^k * e_i^{k+1} \pmod{3}$ , hrany  $h_i^k * f_i^{k-1} \pmod{3}$  a polhrany  $r_i^k$  napojíme na izolovaný vrchol  $v$  (pozri obrázok 2.3).

Trieda rotačných binárnych snarkov  $\mathcal{T}$  je množina obsahujúca Petersenov snark  $G_2$  a všetky rotačné binárne snarky  $G_{i+1}$  definované podľa predošlého odseku.

**Tvrdenie 2.1.6** (Máčajová, Škoviera [9]). *Ľubovoľný graf  $G_i$  pre  $i \geq 2$  z triedy  $\mathcal{T}$  je cyklicky hranovo 5-súvislý rotačný  $T_d$  snark s hĺbkou  $d$ .*

Nakoľko sa po zvyšok kapitoly venujeme skúmaniu Kászonyiho funkcie na rotačných binárnych snarkoch z triedy  $\mathcal{T}$ , budeme mať vždy pod pojmom rotačný binárny snark  $T_d$  respektíve graf  $G_d$  na mysli konkrétny snark z tejto triedy.

## 2.2 Rozbor farbení (2, 2, 1)-pólov

Skôr ako prejdeme k skúmaniu samotnej Kászonyiho funkcie na rotačných binárnych snarkoch sa ešte v rámci dvoch podkapitol zameriame na skúmanie počtu rôznych hranových 3-farbení na (2, 2, 1)-póloch  $B_i$  ako aj na multipóloch, ktoré vzniknú z Petersenovho negátora  $B_2$ , keď na ňom potlačíme riadnu alebo visiacu hranu. Skúmať ich budeme v závislosti od zafarbenia polhrán na jednotlivých konektoroch, a samozrejme v závislosti od  $i$ . V tejto podkapitole si rozoberieme možné hranové 3-farbenia na Petersenovom negátore  $B_2$ . Následne sa pozrieme ako spájanie (2, 2, 1)-pólov vplyva na počty farbení pri rôznych zafarbeniach konektorov. Na záver, pomocou indukcie, zovšeobecníme naše pozorovania pre ľubovoľný (2, 2, 1)-pól  $B_i$ .

**Lema 2.2.1** (Paritná lema). *Nech  $G$  je kubický graf s  $n$  visiacimi hranami, ktorý je hranovo 3-zafarbený, pričom  $n_i$  polhrán je zafarbených farbou  $i$ .*

*Potom  $n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv n \pmod{2}$ .*

Z Paritnej lemy vyplýva, že jediné prípustné farbenia na Petersenovom negátore sú také, že z piatich visiacich hrán budú tri zafarbené rovnakou farbou  $c_1$  a zvyšné dve visiace hrany budú zafarbené jedna farbou  $c_2$  a druhá farbou  $c_3$ .

Je ľahko vidieť, že stačí rozobrať šesť rôznych zafarbení visiacich hrán na konektoroch Petersenovho negátora. Všetky ostatné možné farbenia vieme potom získať pomocou permutovania farieb a automorfizmu z Poznámky 2.1.1. Pre názornosť budeme používať farby z množiny  $c = \{1, 2, 3\}$  a tri visiace hrany, ktoré musia byť zafarbené rovnakou farbou zafarbíme farbou 1. Týchto šesť rôznych typov zafarbení si teraz systematicky nazveme, nakoľko ich budeme používať aj pri  $(2, 2, 1)$ -póloch  $B_i$  vyššieho rádu.

**Definícia 2.2.2** (Počty hranových farbení na  $(2, 2, 1)$ -póle  $B_i$ ). Pre  $i \geq 2$  majme  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i = B_i(S_1, S_2, (r))$ . Potom pod symbolom  $X_{i,j}$  pre  $1 \leq j \leq 6$  máme na mysli počet rôznych hranových 3-farbení  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  pri konkrétnom zafarbení konektorov. V prípade potreby pod daným symbolom môžeme mať na mysli aj samotný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i$  s konkrétnym typom zafarbenia visiacich hrán  $c$ . Jednotlivé typy  $X_{i,j}$  definujeme nasledovne:

- $X_{i,1}$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = (1, 2)$ ,  $c(S_2) = (1, 3)$  a  $c(r) = 1$ .
- $X_{i,2}$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = (1, 2)$ ,  $c(S_2) = (3, 1)$  a  $c(r) = 1$ .
- $X_{i,3}$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = (2, 1)$ ,  $c(S_2) = (3, 1)$  a  $c(r) = 1$ .
- $X_{i,4}$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = (1, 1)$ ,  $c(S_2) = (2, 3)$  a  $c(r) = 1$ .
- $X_{i,5}$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = (1, 1)$ ,  $c(S_2) = (3, 1)$  a  $c(r) = 2$ .
- $X_{i,6}$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = (1, 1)$ ,  $c(S_2) = (1, 3)$  a  $c(r) = 2$ .

Teraz urobíme rozbor počtov rôznych hranových 3-farbení pre konkrétne zafarbenia konektorov Petersenovho negátora, čím určíme hodnoty pre jednotlivé typy  $X_{2,j}$ ,  $1 \leq j \leq 6$ . Predpokladajme, že vrcholy a visiace hrany  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_2$  sú značené podľa obrázka 2.1. Riadne hrany značíme pomocou oboch incidentných vrcholov.

Nech  $c(S_1) = (1, 2)$ ,  $c(S_2) = (1, 3)$  a  $c(r) = 1$ . Potom  $c(v_5v_6) = 1$  odkiaľ  $c(v_2v_5) = 2$  a  $c(v_3v_6) = 3$ . Potom ale susedné hrany  $v_1v_3$  a  $v_3v_7$  musia byť obe zafarbené farbou 2, čo je v spore s definíciou farbenia. Preto  $X_{2,1} = 0$ .

Nech  $c(S_1) = (1, 2)$ ,  $c(S_2) = (3, 1)$  a  $c(r) = 1$ . Potom  $c(v_5v_6) = 3$  a  $c(v_4v_7) = 2$ . Odkiaľ  $c(v_3v_7) = 1$ , čo spôsobí, že nevieme zafarbiť hranu  $v_3v_6$ . Preto aj  $X_{2,2} = 0$ .

Nech  $c(S_1) = (2, 1)$ ,  $c(S_2) = (3, 1)$  a  $c(r) = 1$ . Potom postupným zafarbovaním hrán dostávame, že musí platiť  $c(v_4v_7) = 1$ ,  $c(v_3v_7) = 2$  a  $c(v_3v_6) = 3$ . To spôsobí, že hranu  $v_1v_3$  nevieme zafarbiť. Preto  $X_{2,3} = 0$ .

V ostávajúcich troch prípadoch je možné hrany Petersenovho negátoru zafarbiť jednoznačným spôsobom. Preto  $X_{2,4} = X_{2,5} = X_{2,6} = 1$ . Nájdenie jediného možného farbenia je v týchto prípadoch triviálne, preto ich neuvádzame explicitne.

Pre lepšiu čitateľnosť zosumarizujeme získané poznatky pomocou tabuľky.

Typ zafarbenia	Počet farbení
$X_{2,1}$	0
$X_{2,2}$	0
$X_{2,3}$	0
$X_{2,4}$	1
$X_{2,5}$	1
$X_{2,6}$	1

Predpokladajme, že spájame dva (2, 2, 1)-póly  $B_i$  a  $B'_i$ , čím vznikne (2, 2, 1)-pól  $B_{i+1}$ . Teraz si ukážeme, akým spôsobom ovplyvňuje spájanie dvoch (2, 2, 1)-pólov  $B_i$  výsledný počet hranových 3-farbení (2, 2, 1)-pólu  $B_{i+1}$ . Zaoberáme sa len farbeniami, kde sú konektory  $B_{i+1}$  zafarbené podľa jedného z typov zafarbení z Definície 2.2.2. Ostatné farbenia konektorov vieme získať pomocou permutácie farieb a automorfizmu  $\rho$  z Poznámky 2.1.2. Značenia hrán uvažujeme podľa obrázku 2.2.

Vzhľadom na prácnosť a rozsiahlosť rozboru, ktorý je vo svojej podstate iba skúšaním možných zafarbení hrán  $k$ ,  $l$ ,  $r$  a  $r'$  za predpokladu, že zafarbenie hrán  $e$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$  a  $r''$  je dané konkrétnym typom  $X_{i+1,j}$  sme sa v práci rozhodli podrobne zanalyzovať iba typ  $X_{i+1,1}$ . Vzťahy u ostatných typov následne uvádzame pomocou tabuľky, spolu s typom  $X_{i+1,1}$ . V prípade potreby si čitateľ môže sám odvodiť a skontrolovať, že u ľubovoľného iného typu nami uvedené vzťahy platia. Môže pri tom využiť postup, ktorý sme využili pri hľadaní vzťahov pre typ  $X_{i+1,1}$ .

Riešime vzťah  $X_{i+1,1}$ , preto sú hrany  $e$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$  a  $r''$  postupne zafarbené farbami 1, 2, 1, 3 a 1. Preto hrana  $r$  môže byť zafarbená buď farbou 2 alebo 3. Rozoberieme obe možnosti:

1.  $c(r) = 2$ . Potom  $c(r') = 3$ . Z Paritnej lemy vieme, že hrany  $k$ ,  $l$  musia byť zafarbené (v nejakom poradí) farbami 2, 3, lebo ide o visiace hrany (2, 2, 1)-pólu  $B_i$ .

Ak zafarbíme  $c(k) = 2$  a  $c(l) = 3$ , tak potom  $B_i$  je typu<sup>1</sup>  $X_{i,2}$  a  $B'_i$  je typu  $X_{i,3}$ .

<sup>1</sup>Vždy máme na mysli po vhodnej permutácii farieb a v prípade potreby aj s využitím automorfizmu  $\rho$  z Poznámky 2.1.2.

Ak zafarbíme  $c(k) = 3$  a  $c(l) = 2$ , tak potom  $B_i$  je typu  $X_{i,3}$  a  $B'_i$  je typu  $X_{i,2}$ .

2.  $c(r) = 3$ . Potom  $c(r') = 3$ . Z Paritnej lemy vieme, že hrany  $k, l$  musia byť zafarbené obe rovnakou farbou lebo ide o visiace hrany  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$ .

Ak zafarbíme  $c(k) = c(l) = 1$  dostávame, že  $B_i$  aj  $B'_i$  je typu  $X_{i,6}$ .

Ak zafarbíme  $c(k) = c(l) = 2$  dostávame, že  $B_i$  je typu  $X_{i,5}$  a  $B'_i$  je typu  $X_{i,4}$ .

Ak zafarbíme  $c(k) = c(l) = (3)$  dostávame, že  $B_i$  je typu  $X_{i,4}$  a  $B'_i$  je typu  $X_{i,5}$ .

Výsledný počet farbení potom získame ako súčet farbení cez všetky vyššie zanalyzované možnosti, pričom počet rôznych farbení u každej možnosti získame ako súčin možných farbení u použitých typov  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_i$  a  $B'_i$ , nakoľko farbenia riadnych hrán v rámci jedného  $(2, 2, 1)$ -pólu sú nezávislé od toho druhého, lebo sme už zafarbovali farbenia na ich konektoroch. Preto  $X_{i+1,1} = 2X_{i,2} \cdot X_{i,3} + 2X_{i,4} \cdot X_{i,5} + X_{i,6}^2$ . Rekurzívne vzťahy pre ostatné typy  $X_{i+1,j}$  pre  $2 \leq j \leq 6$  spolu s typom  $X_{i+1,1}$  teraz uvedieme pomocou tabuľky.

Typ zafarbenia	Počet farbení vyjadrený rekurzívne
$X_{i+1,1}$	$2X_{i,2} \cdot X_{i,3} + 2X_{i,4} \cdot X_{i,5} + X_{i,6}^2$
$X_{i+1,2}$	$X_{i,1} \cdot X_{i,3} + X_{i,2}^2 + X_{i,4} \cdot X_{i,5} + X_{i,4} \cdot X_{i,6} + X_{i,5} \cdot X_{i,6}$
$X_{i+1,3}$	$2X_{i,1} \cdot X_{i,2} + 2X_{i,4} \cdot X_{i,6} + X_{i,5}^2$
$X_{i+1,4}$	$X_{i,1} \cdot X_{i,5} + X_{i,2} \cdot X_{i,5} + X_{i,2} \cdot X_{i,6} + X_{i,3} \cdot X_{i,6}$
$X_{i+1,5}$	$X_{i,1} \cdot X_{i,4} + X_{i,2} \cdot X_{i,4} + X_{i,2} \cdot X_{i,6} + X_{i,3} \cdot X_{i,5}$
$X_{i+1,6}$	$X_{i,1} \cdot X_{i,6} + X_{i,2} \cdot X_{i,4} + X_{i,2} \cdot X_{i,5} + X_{i,3} \cdot X_{i,4}$

**Lema 2.2.3.** *Zoberme si  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i$ ,  $i \geq 2$  a prislúchajúce typy farbení  $X_{i,j}$ ,  $1 \leq j \leq 6$ . Potom pre  $i = 2$  platí:  $X_{2,1} = X_{2,2} = X_{2,3} = 0$  a  $X_{2,4} = X_{2,5} = X_{2,6} = 1$ . Ďalej pre  $i \geq 3$  platí:  $X_{i,1} = X_{i,2} = X_{i,3} = 2^{f(i)} \cdot 3^{g(i)}$  a  $X_{i,4} = X_{i,5} = X_{i,6} = 0$ , pričom funkcie  $f(i)$  a  $g(i)$  sú tvaru  $f(i) = 2^{i-3} - 1$  a  $g(i) = 2^{i-3}$ .*

*Dôkaz.* Pre  $i = 2$  hodnoty  $X_{2,j}$  už poznáme z rozboru farbení na Petersenovom negátore  $B_2$  (pozri tabuľku 2.2).

Vychádzajúc z hodnôt  $X_{2,j}$  a rekurentných vzťahov popísaných v tabuľke 2.2 pre  $i = 3$  získame hodnoty  $X_{3,1} = X_{3,2} = X_{3,3} = 3$  a  $X_{3,4} = X_{3,5} = X_{3,6} = 0$

Hodnoty pre  $i \geq 4$  určíme matematickou indukciou. Upravme rekurentné vzťahy z tabuľky 2.2 podľa predpokladu v našej leme, pričom si označme hodnoty pre typy  $X_{i,1} = X_{i,2} = X_{i,3}$  ako  $X_{i,D}$ . O hodnotách  $X_{i,4}$ ,  $X_{i,5}$  a  $X_{i,6}$  predpokladáme, že sú nulové.

Dostávame potom nasledovné vzťahy:  $X_{i+1,1} = X_{i+1,2} = X_{i+1,3} = 2 \cdot X_{i,D}^2$  a  $X_{i+1,4} = X_{i+1,5} = X_{i+1,6} = 0$ .

Odtiaľ je už potom ľahké určiť hodnoty funkcií  $f(i+1)$  a  $g(i+1)$ , pretože:  

$$X_{i+1,D} = 2 \cdot X_{i,D}^2 = 2 \cdot (2^{f(i)} \cdot 3^{g(i)})^2 = 2^{2 \cdot f(i)+1} \cdot 3^{2 \cdot g(i)} = 2^{2 \cdot (2^{i-3}-1)+1} \cdot 3^{2 \cdot 2^{i-3}} =$$

$$= 2^{2^{i-2}-1} \cdot 3^{2^{i-2}} = 2^{f(i+1)} \cdot 3^{g(i+1)}. \quad \square$$



Nahliadnime, že pre každé  $i \geq 2$  platí pre typy  $X_{i,1} = X_{i,2} = X_{i,3} = X_{i,D}$  a  $X_{i,4} = X_{i,5} = X_{i,6} = X_{i,S}$ .

Ďalej pre jednotlivé typy zafarbení konektorov platí ešte jedna zaujímavá štruktúrna vlastnosť, ktorá sa neskôr ukáže ako veľmi dôležitá. Pre typy  $X_{i,1}$ ,  $X_{i,2}$  a  $X_{i,3}$  platí, že dve hrany v rámci vstupného aj výstupného konektora sú zafarbené každá inou farbou. Naopak, pre typy  $X_{i,4}$ ,  $X_{i,5}$  a  $X_{i,6}$  platí, že má obe hrany buď u vstupného, alebo u výstupného konektora zafarbené rovnakou farbou.

Preto, ak to bude pre nás výhodné, budeme používať značenia<sup>2</sup>  $X_{i,D}$  a  $X_{i,S}$ , čím máme na mysli ľubovoľný z prvých troch (respektíve druhých troch) typov zafarbenia konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  alebo aj samotný počet rôznych hranových 3-farbení pri danom type.

Na záver ešte zhrnieme všetky farbenia  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_i$ ,  $i \geq 2$  do jednej prehľadnej tabuľky.

Typ zafarbenia	Počet farbení
$X_{2,D} = X_{2,1} = X_{2,2} = X_{2,3}$	0
$X_{2,S} = X_{2,4} = X_{2,5} = X_{2,6}$	1
$X_{i,D} = X_{i,1} = X_{i,2} = X_{i,3}$ , $i \geq 3$	$2^{2^{i-3}-1} \cdot 3^{2^{i-3}}$
$X_{i,S} = X_{i,4} = X_{i,5} = X_{i,6}$ , $i \geq 3$	0

## 2.3 Farbenia po potlačení hrany na Petersenovom negátore

V tejto podkapitole rozoberieme možné hranové 3-farbenia niektorých multipólov, ktoré vzniknú tak, že na Petersenovom negátore  $B_2$  potlačíme riadnu alebo visiacu hranu. Následne prejdeme k samotnému dôkazu Kászonyiho funkcie pre rotačné binárne snarky.

Budeme používať značenia z Definície 2.2.2. Pod pojmom  $X_{2,j}(e)$ ,  $1 \leq j \leq 6$  máme na mysli typ zafarbenia hrán na konektoroch<sup>3</sup>, ktorý je rovnaký ako typ  $X_{2,j}$  z Definície 2.2.2, ale uvažujeme pri tom miesto Petersenovho negátora  $B_2$   $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim e$ , teda multipól, ktorý vznikne z Petersenovho negátora  $B_2$  potlačením niektorej (visiacej) hrany  $e$ .

Pri niektorých  $(2, 2, 1)$ -póloch  $B_2 \sim e$  neexistuje „symetrický“ automorfizmus  $\rho \in \text{Aut}(B_2 \sim e)$ , ktorý navzájom transformuje vstupný a výstupný konektor  $S_1$  a  $S_2$ , pričom zachováva reziduálny konektor  $S_3$ . Preto zavádzame značenia niekoľkých nových typov farbení visiaticich, ktoré nevieme z typov  $X_{2,j}(e)$ ,  $1 \leq j \leq 6$  získať iba využitím permutácie farieb.

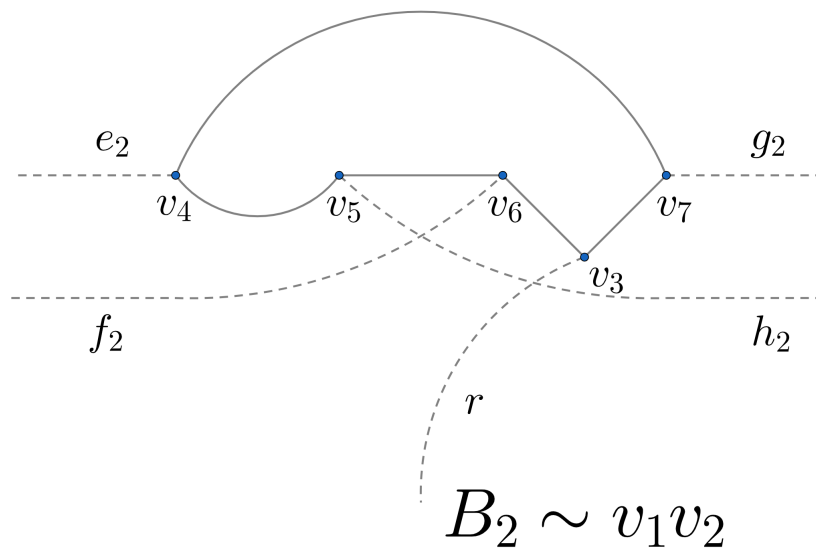
<sup>2</sup> $D$  z anglického *different* a  $S$  z anglického *same*

<sup>3</sup>Alebo v prípade potreby aj počet rôznych hranových farbení pri danom type.

Typ  $X_{2,j}(e)'$  pre  $1 \leq j \leq 6$  definujeme ako počet farbení  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_2 \sim e$  pri takom zafarbení konektorov, že ak pri type  $X_{2,j}(e)$  sme uvažovali zafarbenie konektorov  $c(S_1) = (a_1, a_2)$ ,  $c(S_2) = (a_3, a_4)$  a  $c(r) = a_5$ , tak potom  $X_{2,j}(e)'$  má zafarbenie konektorov  $c(S_1) = (a_3, a_4)$ ,  $c(S_2) = (a_1, a_2)$  a  $c(r) = a_5$ .

Všimnime si, že typy  $X_{2,1}(e)'$  a  $X_{2,3}(e)'$  nie je nutné samostatne rozoberať, nakoľko ich vieme z typov  $X_{2,1}(e)$  a  $X_{2,3}(e)$  dostať vhodnou permutáciou farieb.

Vzhľadom na pomerne veľké množstvo farbení, ktoré je potrebné manuálne rozobrať sme sa rozhodli ukázať rozbor len tých prípadov, kde pri konkrétnom type zafarbenia konektorov existuje viac možných farbení  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_2 \sim e$ . Počty farbení u zvyšných typov zosumarizujeme formou tabuľky. Domnievame sa, že čitateľ je v prípade potreby schopný si sám overiť nami poskytnuté závery a postupným dofarbovaním hrán nájsť jednoznačné farbenie (ak existuje) alebo dospieť k sporu (ak farbenie neexistuje). Návodom ako postupovať mu môže poslúžiť rozbor farbení u Petersenovho negátoru  $B_2$ .



Obr. 2.4:  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim v_1 v_2$

$(2, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim v_1 v_2$  je  $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne potlačením hrany  $v_1 v_2$  na Petersenovom negátore  $B_2$  (pozri obrázok 2.4).

Tento  $(2, 2, 1)$ -pól nemá viacero rôznych farbení u niektorého z typov zafarbenia konektorov, preto jeho farbenia uvádzame vo forme tabuľky.

Typ zafarbenia	Počet farbení
$X_{2,1}(v_1v_2)$	1
$X_{2,2}(v_1v_2)$	0
$X_{2,2}(v_1v_2)'$	1
$X_{2,3}(v_1v_2)$	1
$X_{2,4}(v_1v_2)$	0
$X_{2,4}(v_1v_2)'$	0
$X_{2,5}(v_1v_2)$	1
$X_{2,5}(v_1v_2)'$	0
$X_{2,6}(v_1v_2)$	0
$X_{2,6}(v_1v_2)'$	1

Ako sa neskôr v dôkaze hodnôt Kászonyiho funkcie pre rotačné binárne snarky ukáže, zo všetkých riadnych hrán na Petersenovom negátore, ktoré môžeme potlačiť, nám bude stačiť poznať možné farbenia pre  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim v_1v_2$ .

Teraz prejdeme na analýzu počtov farbení v závislosti od zafarbenia konektorov pre tie multipóly, ktoré vzniknú potlačením niektorej z visiacych hrán.

Z Paritnej lemy vyplýva, že ak máme štyri visiace hrany, potom sú buď všetky štyri hrany zafarbené rovnakou farbou alebo sú po dvoch zafarbené rovnakou farbou.

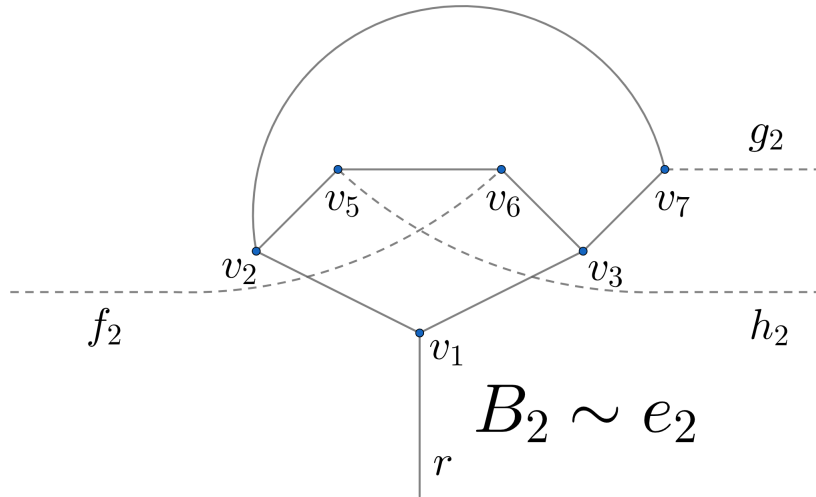
Nakoľko teraz budeme rozoberať niekoľko multipólov, ktoré sú buď  $(2, 1, 1)$ -pólmi alebo  $(1, 2, 1)$ -pólmi, zdefinujeme si zopár nových typov farbení hrán na konektoroch. Ostatné farbenia na danom multipóle je možné získať vhodnou permutáciou farieb.

**Definícia 2.3.1.** Majme pre  $i \geq 2$   $(m, n, 1)$ -pól  $B_i \sim e = B_i(S_1, S_2, (r))$ , ktorý vznikol z  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  potlačením visiacej hrany  $e^4$  na vstupnom alebo výstupnom konektore. Preto predpokladajme, že  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$ , pričom  $m + n = 3$ .

Potom pod symbolom  $X_{i,a}(e)$  pre  $a \in \{A, B, C, D\}$  máme na mysli počet rôznych hranových 3-farbení  $(m, n, 1)$ -pólu  $B_i \sim e$  pri konkrétnom zafarbení konektorov. V prípade potreby pod daným symbolom môžeme mať na mysli aj samotný  $(m, n, 1)$ -pól  $B_i \sim e$  s konkrétnym typom zafarbenia visiacych hrán  $c$ .

Nech  $S_x$  je ten z konektorov  $S_1$  a  $S_2$ , ktorý obsahuje dve hrany a  $S_y$  je zvyšný konektor, ktorý obsahuje jednu hranu. Potom jednotlivé typy  $X_{i,a}(e)$  definujeme nasledovne:

- $X_{i,A}(e)$  – počet farbení takých, že  $c(S_x) = (1, 1)$ ,  $c(S_y) = 1$ ,  $c(r) = 1$ .
- $X_{i,B}(e)$  – počet farbení takých, že  $c(S_x) = (1, 1)$ ,  $c(S_y) = 2$ ,  $c(r) = 2$ .
- $X_{i,C}(e)$  – počet farbení takých, že  $c(S_x) = (1, 2)$ ,  $c(S_y) = 1$ ,  $c(r) = 2$ .
- $X_{i,D}(e)$  – počet farbení takých, že  $c(S_x) = (1, 2)$ ,  $c(S_y) = 2$ ,  $c(r) = 1$ .

Obr. 2.5:  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim e_2$ 

$(1, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim e_2$  je  $(1, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne potlačením visiacej hrany  $e_2$  na Petersenovom negátore  $B_2$  (pozri obrázok 2.5). Vstupný konektor  $S_1$  tvorí hrana  $f_2$ , výstupný konektor  $S_2$  usporiadaná dvojica hrán  $(g_2, h_2)$  a reziduálny konektor  $S_3 = (r)$ .

Pozrime sa teraz na možné farbenia v závislosti od zafarbenia visiacych hrán. Názvy typov zafarbení konektorov používame z Definície 2.3.1. Nakoľko pri tomto multipóle to s farbeniami nie je jednoznačné, riadne ich rozoberieme.

Typ  $X_{2,A}(e_2)$ . Vieme, že  $c(f_2) = c(g_2) = c(h_2) = c(r) = 1$ . Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zafarbiť hranu  $v_1v_3$  farbou 2. Potom ale susedné hrany  $v_3v_6$  a  $v_3v_7$  môžeme zafarbiť len farbou 3, čím dospejeme k sporu. Preto  $X_{2,A}(e_2) = 0$ .

Typ  $X_{2,B}(e_2)$ . Platí  $c(f_2) = c(r) = 2$  a  $c(g_2) = c(h_2) = 1$ . Začínajúc dofarbením hrany  $c(v_5v_6) = 3$  postupne dospejeme k jednoznačnému farbeniu (ponechané na čitateľa). Preto  $X_{2,B}(e_2) = 1$ .

Typ  $X_{2,C}(e_2)$ . Zafarbenie visiacych hrán farbami  $c(f_2) = c(g_2) = 1$  a  $c(h_2) = c(r) = 2$  vedie k jednoznačnému farbeniu grafu. Preto  $X_{2,C}(e_2) = 1$ .

U typu  $X_{2,D}(e_2)$  je rozbor farbení komplikovanejší. Vieme, že pri tomto type platí  $c(g_2) = c(r) = 1$  a  $c(f_2) = c(h_2) = 2$ . Všimnime si, že pri tomto zafarbení konektorov neexistuje hrana, ktorú by sme vedeli jednoznačne zafarbiť. Vezmime si preto napríklad hranu  $v_5v_6$ . Máme dve možnosti ako ju zafarbiť:

1.  $c(v_5v_6) = 1$ . Potom  $c(v_3v_6) = c(v_2v_5) = 3$ . Lenže potom môžu byť dve susedné hrany  $v_1v_2$  a  $v_1v_3$  zafarbené farbou 2, čím dospejeme k sporu.
2.  $c(v_5v_6) = 3$ . Potom  $c(v_3v_6) = c(v_2v_5) = 1$ . Vrcholy  $v_1, v_3, v_7$  a  $v_2$  tvoria cyklus

<sup>4</sup>Môže ísť o ľubovoľnú visiacu hranu na vstupnom alebo výstupnom konektore. V prípade tejto definície sa nedržíme značenia zo žiadneho obrázku.

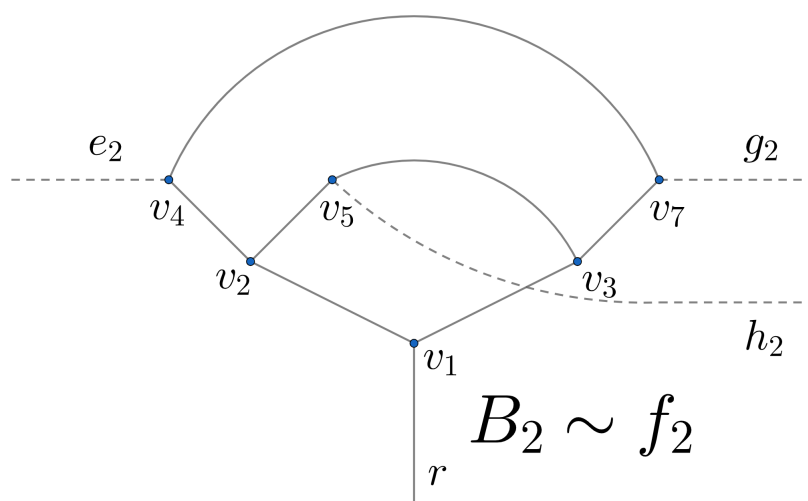
### 2.3. FARBENIA PO POTLAČENÍ HRANY NA PETERSENOVOM NEGÁTORE<sup>23</sup>

párnej dĺžky a z každého z týchto vrcholov vychádza mimo cyklu jedna hrana zafarbená farbou 1. Preto v tomto prípade existujú dva rôzne spôsoby dofarbenia multipólu.

Zobratím do úvahy oboch možností dospejeme k záveru, že  $X_{2,D}(e_2) = 2$ .

Na záver pre lepšiu prehľadnosť zosumarizujeme získané poznatky formou tabuľky.

Typ zafarbenia	Počet farbení
$X_{2,A}(e_2)$	0
$X_{2,B}(e_2)$	1
$X_{2,C}(e_2)$	1
$X_{2,D}(e_2)$	2



Obr. 2.6:  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim f_2$

$(1, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim f_2$  je  $(1, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne potlačením visiacej hrany  $f_2$  na Petersenovom negátore  $B_2$  (pozri obrázok 2.6). Vstupný konektor  $S_1$  tvorí hrana  $e_2$ , výstupný konektor  $S_2$  usporiadaná dvojica hrán  $(g_2, h_2)$  a reziduálny konektor  $S_3 = (r)$ .

Názvy typov zafarbení konektorov uvažujeme z Definície 2.3.1.

Typ  $X_{2,A}(f_2)$ . Vieme, že  $c(e_2) = c(g_2) = c(h_2) = c(r) = 1$ . Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zafarbiť hrana  $v_1v_3$  farbou 2. Potom ale susedné hrany  $v_3v_5$  a  $v_3v_7$  môžeme zafarbiť len farbou 3, čím dospejeme k sporu. Preto  $X_{2,A}(f_2) = 0$ .

Typ  $X_{2,B}(f_2)$ . Zafarbenie  $c(e_2) = c(r) = 2$  a  $c(g_2) = c(h_2) = 1$  vedie k jednoznačnému zafarbeniu zvyšných hrán. Preto  $X_{2,B}(f_2) = 1$ .

Pri type  $X_{2,C}(f_2)$  je rozbor farbení najkomplikovanejší. Pri zafarbení visiacich hrán spôsobom  $c(e_2) = c(g_2) = 1$  a  $c(h_2) = c(r) = 2$  neexistuje hrana, ktorú by sme vedeli jednoznačne zafarbiť. Vezmime si preto napríklad hrana  $v_3v_7$ . Máme dve možnosti ako ju zafarbiť:

1.  $c(v_3v_7) = 2$ . Potom  $c(v_4v_7) = 3$  a následne  $c(v_4v_2) = 2$ . Vrcholy  $v_1, v_3, v_5$  a  $v_2$  tvoria cyklus párnej dĺžky a z každého z týchto vrcholov vychádza mimo cyklu jedna hrana zafarbená farbou 2. Preto v tomto prípade existujú dva rôzne spôsoby dofarbenia multipólu.
2.  $c(v_3v_7) = 3$ . Potom  $c(v_4v_7) = 2$  a následne  $c(v_4v_2) = 3$ . Potom dve susedné hrany  $v_1v_2$  a  $v_1v_3$  môžeme zafarbiť len farbou 1, čo vedie k sporu.

Zobratím do úvahy oboch možností dospejeme k záveru, že  $X_{2,C}(f_2) = 2$ .

Typ  $X_{2,D}(f_2)$ . Zafarbenie  $c(g_2) = c(r) = 1$  a  $c(e_2) = c(h_2) = 2$  vedie k jednoznačnému zafarbeniu zvyšných hrán. Preto  $X_{2,D}(f_2) = 1$ .

Pre lepšiu prehľadnosť zosumarizujeme získané poznatky formou tabuľky.

Typ zafarbenia	Počet farbení
$X_{2,A}(f_2)$	0
$X_{2,B}(f_2)$	1
$X_{2,C}(f_2)$	2
$X_{2,D}(f_2)$	1

(2, 1, 1)-pól  $B_2 \sim g_2$  je (2, 1, 1)-pól, ktorý vznikne potlačením visiacej hrany  $g_2$  na Petersenovom negátore  $B_2$ . Vstupný konektor  $S_1$  tvorí dvojica hrán  $(e_2, f_2)$ , výstupný konektor  $S_2 = (h_2)$  a reziduálny konektor  $S_3 = (r)$ .

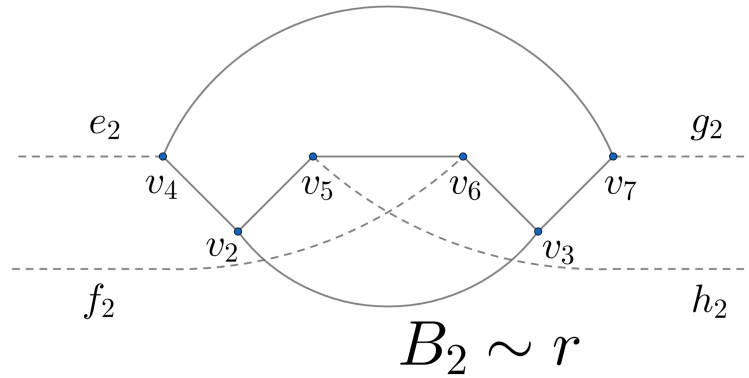
(2, 1, 1)-pól  $B_2 \sim h_2$  je (2, 1, 1)-pól, ktorý vznikne potlačením visiacej hrany  $h_2$  na Petersenovom negátore  $B_2$ . Vstupný konektor  $S_1$  tvorí dvojica hrán  $(e_2, f_2)$ , výstupný konektor  $S_2 = (g_2)$  a reziduálny konektor  $S_3 = (r)$ .

Medzi (2, 1, 1)-pólom  $B_2 \sim g_2$  a (1, 2, 1)-pólom  $B_2 \sim e_2$  existuje zobrazenie  $\rho'$ , ktoré zachováva štruktúru grafu a vymení vstupný a výstupný konektor. Vizualne si ho môžeme predstaviť ako osovú súmernosť podľa osi  $r$  na obrázku 2.5. Preto platí  $X_{2,a}(g_2) = X_{2,a}(e_2)$  pre ľubovoľné  $a \in \{A, B, C, D\}$ .

Analogickú úvahu môžeme sformulovať aj medzi (2, 1, 1)-pólom  $B_2 \sim h_2$  a (1, 2, 1)-pólom  $B_2 \sim f_2$ . Preto platí  $X_{2,a}(h_2) = X_{2,a}(f_2)$  pre ľubovoľné  $a \in \{A, B, C, D\}$ .

(2, 2)-pól  $B_2 \sim r$  je (2, 2)-pól, ktorý vznikne potlačením visiacej hrany  $r$  na Petersenovom negátore  $B_2$  (pozri obrázok 2.7). Vstupný konektor  $S_1$  tvorí usporiadaná dvojica hrán  $(e_2, f_2)$  a výstupný konektor  $S_2 = (g_2, f_2)$ .

Opäť tu máme štyri visiace hrany, takže musia byť všetky štyri alebo po dvoch zafarbené rovnakou farbou. To nám vytvára priestor na štyri typy zafarbení vstupného a výstupného konektora, ostatné typy farbení hrán na konektoroch vieme získať permutáciou farieb. Typy definujeme nasledovným spôsobom:


 Obr. 2.7:  $(2, 2)$ -pól  $B_2 \sim r$ 

**Definícia 2.3.2.** Majme  $(2, 2)$ -pól  $B_2 \sim r = B_2(S_1, S_2)$ . Potom pod symbolom  $X_{2,a}(r)$  pre  $a \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  máme na mysli počet rôznych hranových 3-farbení  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$  pri konkrétnom zafarbení konektorov. V prípade potreby pod daným symbolom môžeme mať na mysli aj samotný  $(2, 2)$ -pól  $B_2 \sim r$  s konkrétnym typom zafarbenia visiacych hrán  $c$ . Jednotlivé typy  $X_{2,a}(r)$  definujeme nasledovne:

- $X_{2,\alpha}(r)$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = (1, 1)$  a  $c(S_2) = (2, 2)$ .
- $X_{2,\beta}(r)$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = (1, 2)$  a  $c(S_2) = (2, 1)$ .
- $X_{2,\gamma}(r)$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = c(S_2) = (1, 2)$ .
- $X_{2,\delta}(r)$  – počet farbení takých, že  $c(S_1) = c(S_2) = (1, 1)$ .

Teraz rozoberieme počty rôznych farbení  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$  v závislosti od vyššie definovaných zafarbení hrán na konektoroch.

Typ  $X_{2,\alpha}(e)$ . Pri tomto zafarbení konektorov existuje jednoznačné zafarbenie  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$ . Preto  $X_{2,\alpha}(e) = 1$ .

Typ  $X_{2,\beta}(r)$ . Ak máme konektory zafarbené  $c(S_1) = (1, 2)$  a  $c(S_2) = (2, 1)$ , potom hrany  $v_4v_7$  a  $v_5v_6$  musia byť zafarbené farbou 3, z čoho vyplýva, že susedné hrany  $v_2v_4$  a  $v_2v_5$  môžeme zafarbiť len farbou 2, čo je v spore s definíciou hranového farbenia. Preto  $X_{2,\beta}(r) = 0$ .

Typ  $X_{2,\gamma}(r)$ . Pri zafarbení konektorov  $c(S_1) = c(S_2) = (1, 2)$  neexistuje hrana, ktorú by sme vedeli jednoznačne zafarbiť. Vezmime si preto napríklad hranu  $v_2v_4$ . Máme dve možnosti ako ju zafarbiť:

1.  $c(v_2v_4) = 2$ . Potom  $c(v_4v_7) = 3$  a následne  $c(v_3v_7) = 2$ . Vrcholy  $v_2, v_3, v_6$  a  $v_5$  tvoria cyklus párnej dĺžky a z každého z nich vychádza tretia hrana zafarbená farbou 2. Preto v tomto prípade existujú dva jedinečné spôsoby zafarbenia grafu.
2.  $c(v_2v_4) = 3$ . Následne už existuje jednoznačné zafarbenie  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$ .

Zobratím do úvahy oboch možností dospejeme k záveru, že  $X_{2,\gamma}(r) = 3$ .

Typ  $X_{2,\delta}(r)$ . Pri tomto type máme konektory zafarbené nasledovným spôsobom  $c(S_1) = c(S_2) = (1, 1)$ . Uvedomme si na úvod, že hrana  $v_2v_3$  musí byť zafarbená farbou 1. Ak by bola, bez ujmy na všeobecnosti, zafarbená napríklad farbou 2, tak potom hrany  $v_2v_4$  aj  $v_2v_5$  vieme zafarbiť len farbou 3, čo je spor. Predpokladajme preto, že  $c(v_2v_3) = 1$ . Potom vrcholy  $v_2, v_5, v_6, v_3, v_7, v_4$  tvoria cyklus párnej dĺžky a z každého z nich vychádza tretia hrana zafarbená farbou 1. Preto existujú dve farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$  tohto typu, teda  $X_{2,\delta}(r) = 2$ .

Na záver pre lepšiu prehľadnosť zosumarizujeme získané poznatky formou tabuľky.

Typ zafarbenia	Počet farbení
$X_{2,\alpha}(r)$	1
$X_{2,\beta}(r)$	0
$X_{2,\gamma}(r)$	3
$X_{2,\delta}(r)$	2

## 2.4 Kászonyiho funkcia pre rotačné binárne snarky

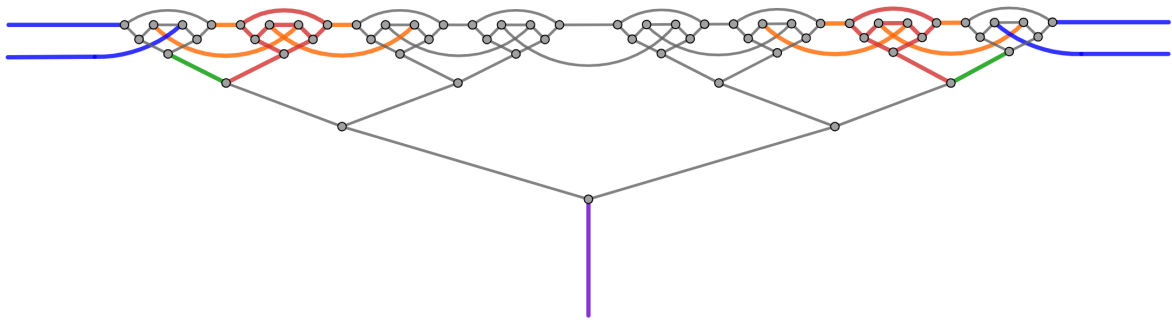
V tejto kapitole určíme hodnotu Kászonyiho funkcie pre všetky hrany ľubovoľného rotačného binárneho snarku  $G_i$ . Pre  $i \geq 6$  zdefinujeme rozdelenie hrán každého snarku  $G_i$  do šiestich tried a následne pre každú z týchto tried určíme a dokážeme hodnotu Kászonyiho funkcie (v závislosti od  $i$ ). Pre malé rotačné binárne snarky  $G_i$  indexu  $1 \leq i \leq 5$  neexistuje opakujúci sa vzor, ktorý by bolo možné zovšeobecniť. Pre tieto grafy uvádzame hodnoty Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  na konci kapitoly, bez dôkazu.

Prejdime teraz k rotačným binárnym snarkom  $G_i$  pre  $i \geq 6$ . Vieme, že každý takýto snark  $G_i$  sa skladá z „centrálneho“ vrcholu  $v$  a troch kópií  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}$  (pozri obrázok 2.3), pričom existuje automorfizmus  $\rho \in \text{Aut}(G_i)$  zobrazujúci každý  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}$  na ľubovoľný iný. Preto určením hodnôt Kászonyiho funkcie pre hrany ľubovoľného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}$ , pre hrany incidentné s centrálnym vrcholom  $v$  a pre hrany, ktoré vznikli spojením visiaticich hrán na konektoroch jednotlivých  $(2, 2, 1)$ -pólov určíme hodnoty Kászonyiho funkcie pre všetky hrany snarku  $G_i$ . Dôkaz začneme tým, že si rozdelíme hrany ľubovoľného  $G_i$  do šiestich tried.

Nech  $G_i$ ,  $i \geq 6$  je rotačný binárny snark, ktorý vznikol spojením troch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$  a centrálnemu vrcholu  $v$ . Potom na ňom definujeme rozdelenie hrán do šiestich tried. Názvy hrán jednotlivých tried vychádzajú z farebnej vizualizácie na obrázku 2.8, ktorá je priradením jednotlivých hrán  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_5$  do nižšie zdefinovaných tried. Pri definovaní tried implicitne predpokladáme, že ak do nejakej triedy patrí konkrétna hrana z jedného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}$ , tak tam patria aj prislúchajúce hrany zo zvyšných dvoch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$ . Samotné triedy potom definujeme nasledovne:



- Triedu *fialových* hrán  $E_{F,i}$  definujeme ako množinu troch hrán incidentných s centrálnym vrcholom  $v$ .
- Triedu *modrých* hrán  $E_{M,i}$  definujeme ako množinu hrán, ktoré vznikli spojením visiaticich hrán dvoch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$ .
- Triedu *zelených* hrán  $E_{Z,i}$  definujeme nasledovným spôsobom: nech  $x \in \{1, -1\}$  a nech  $e_x$  je hrana, ktorá vznikla napojením visiacej hrany  $r$  najľavejšieho/najpravejšieho Petersenovho negátoru  $B_2 = B_{i-1}(2)[x]$  na koreň  $v = v(B_{i-1}(3)[x])$  najľavejšieho/najpravejšieho  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 = B_{i-1}(3)[x]$ . Potom hrana  $e_x \in E_{Z,i}$ .
- Triedu *červených* hrán  $E_{C,i}$  definujeme nasledovným spôsobom: nech  $x \in \{2, -2\}$ . Ďalej nech  $E_x(B_{i-1}(2)[x])$  je množina riadnych hrán druhého najľavejšieho/najpravejšieho Petersenovho negátoru  $B_2 = B_{i-1}(2)[x]$  a nech  $e_x$  je hrana, ktorá vznikla napojením visiacej hrany  $r$  druhého najľavejšieho/najpravejšieho Petersenovho negátoru  $B_2 = B_{i-1}(2)[x]$  na koreň  $v = v(B_{i-1}(3)[x])$  najľavejšieho/najpravejšieho  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}(3)[x]$ . Potom  $E_{C,i} = \bigcup_{x \in \{2, -2\}} E_x \cup \{e_x\}$ .
- Triedu *oranžovaných* hrán  $E_{O,i}$  definujeme nasledovne: nech  $x \in \{2, -2\}$ . Ďalej nech  $E_x$  je množina štyroch hrán, ktoré vznikli spojením niektorej zo štyroch visiaticich hrán vstupného alebo výstupného konektoru druhého najľavejšieho/najpravejšieho Petersenovho negátoru  $B_2 = B_{i-1}(2)[x]$  s visiaticou hranou susedného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}(2)[x+1]$  respektíve  $B_{i-1}(2)[x-1]$ . Potom  $E_{O,i} = \bigcup_{x \in \{2, -2\}} E_x$ .
- Trieda *sivých* hrán  $E_{S,i}$  je množina zvyšných hrán rotačného binárneho snarku  $G_i$ . Formálne  $E_{S,i} = \{e \in E(G_i) - (E_{F,i} \cup E_{M,i} \cup E_{Z,i} \cup E_{C,i} \cup E_{O,i})\}$ .



Obr. 2.8: Vizuálne rozdelenie hrán jedného z  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_5$  rotačného binárneho snarku  $G_6$  do šiestich tried

**Tvrdenie 2.4.1.** *Nech  $G_i$ ,  $i \geq 6$  je rotačný binárny snark a  $e \in E(G_i)$  je jeho hrana. Ak  $e \in E_{S,i}$  je sivá hrana, potom je hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e) = 0$ . V ostatných prípadoch je hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  tvaru  $\psi(G_i, e) = 2^{f(i)} \cdot 3^{g(i)}$ ,*

pričom hodnoty funkcií  $f(i)$  a  $g(i)$  závisia od príslušnosti hrany  $e$  do ostávajúcich tried nasledovným spôsobom:

- Nech  $e \in E_{F,i}$  je fialová hrana. Potom  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 2$  a  $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4}$ .
- Nech  $e \in E_{M,i}$  je modrá hrana. Potom  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 1$  a  $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 2$ .
- Nech  $e \in E_{Z,i}$  je zelená hrana. Potom  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} + i - 5$  a  $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 1$ .
- Nech  $e \in E_{C,i}$  je červená hrana. Potom  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} + i - 7$  a  $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4}$ .
- Nech  $e \in E_{O,i}$  je oranžová hrana. Potom  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} + i - 6$  a  $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 1$ .

*Poznámka 2.4.2.* Všimnime si, že pre ľubovoľný rotačný binárny snark  $G_i$ ,  $i \geq 6$  platí  $|E_{F,i}| = 3$ ,  $|E_{M,i}| = 6$ ,  $|E_{Z,i}| = 6$ ,  $|E_{C,i}| = 54$  a  $|E_{O,i}| = 24$ . Tým pádom z predošlej vety vyplýva, že každý rotačný binárny snark  $G_i$  pre  $i \geq 6$  má práve 93 hrán s nenulovou hodnotou Kászonyiho funkcie, pričom tento počet nie je nijak závislý od  $i$ , a teda ani od veľkosti grafu.

### 2.4.1 Dôkaz pre sivé hrany

Na úvod dôkazu si pripomenieme niekoľko pozorovaní, ktoré sú dôležité pre pochopenie základnej myšlienky dôkazu. Rotačný binárny snark  $G_i$ ,  $i \geq 6$  sa skladá z troch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}^0$ ,  $B_{i-1}^1$  a  $B_{i-1}^2$ , pričom výsledné zafarbenie grafu závisí len od toho, akým spôsobom zafarbíme jednotlivé  $(2, 2, 1)$ -póly a ich visiace hrany. Ďalej vieme, že  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_{i-1}$  pre  $i \geq 6$  sú hranovo 3-zafarbiteľné len pre niektoré typy zafarbení konektorov. Konkrétne ide o zafarbenia konektorov typu  $X_{i-1,D}$  (pozri tabuľku 2.2). Tieto typy zafarbení konektorov sú špecifické tým, že obe hrany na vstupnom/výstupnom konektore sú zafarbené každá inou farbou.

Nahliadnime, že každá sivá hrana  $e$  je riadnou hranou niektorého z  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$ . Potom potlačením ľubovoľnej sivej hrany  $e$  len „nahradíme“ jeden z  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$   $(2, 2, 1)$ -pólom  $B_{i-1} \sim e$  a nijako nezmeníme štruktúru spojení medzi jednotlivými  $(2, 2, 1)$ -pólmi (pozri obrázok 2.3).

Tým sa dostávame k hlavnej myšlienke dôkazu. Uvedomme si, že z predošlých pozorovaní vyplýva, že na to, aby mohol byť výsledný graf  $G_i \sim e$  zafarbiteľný musí byť  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1} \sim e$  zafarbiteľný pre niektorý z typov zafarbení konektorov  $X_{i-1,S}$ , teda musí mať zafarbené obe hrany buď na vstupnom alebo na výstupnom konektore rovnakou farbou.

Zvyšok dôkazu, ktorý je nižšie spísaný dôkladne v rámci Lemy 2.4.3 potom postupuje zhruba nasledovným spôsobom – najprv si uvedomíme, že ak najľavejší a najpravejší  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3$  je zafarbiteľný len typom  $X_{3,D}$ , tak potom je aj výsledný

(2, 2, 1)-pól  $B_i \sim e$  zafarbitelný len typom  $X_{i-1,D}$ <sup>5</sup>. Následne v dôkaze sivé hrany rozdelíme do troch typov. Prvý a druhý typ sú také sivé hrany, ktoré sú súčasťou nejakého najľavejšieho/najpravejšieho (2, 2, 1)-pólu  $B_3$ . V tomto prípade ukážeme, že aj keby výsledný (2, 2, 1)-pól  $B_3 \sim e$  bol zafarbitelný pre typ  $X_{3,S}$ , tak potom nebude možné zafarbiť celý (2, 2, 1)-pól  $B_{i-1} \sim e$ . Pre tretí typ hrán, ktoré nie sú súčasťou žiadneho najľavejšieho/najpravejšieho (2, 2, 1)-pólu  $B_3$  je dôkaz podstatne jednoduchší. Stačí si uvedomiť, že ak hrana nie je súčasťou nejakého (2, 2, 1)-pólu, tak potom jej potlačenie neovplyvní jeho možné zafarbenia, a teda ani možné typy farbení jeho konektorov.

**Lema 2.4.3.** *Nech pre  $i \geq 6$  je  $G_i$  rotačný binárny snark, ktorý vznikol z troch (2, 2, 1)-pólov  $B_{i-1}^0$ ,  $B_{i-1}^1$  a  $B_{i-1}^2$ . Nech  $e \in E_{S,i}$  je ľubovoľná sivá hrana z  $E(G_i)$ . Potom pre hodnotu Kászonyiho funkcie platí  $\psi(G_i, e) = 0$ .*

*Dôkaz.* Dôkaz rozdelíme na tri časti. Nech  $E_1(G_i)$  je množina všetkých sivých hrán  $e \in E_{S,i}$  takých, že  $e$  je riadna hrana niektorého najľavejšieho/najpravejšieho Petersenovho negátora  $B_{i-1}^l(2)[\pm 1]$ ,  $0 \leq l \leq 2$ , ktorý je podgrafom ľubovoľného z (2, 2, 1)-pólov  $B_{i-1}^0$ ,  $B_{i-1}^1$  alebo  $B_{i-1}^2$ .

Ďalej nech  $x \in \{-1, 1\}$  a  $0 \leq l \leq 2$ . Potom množinu  $E_2(G_i)$  definujeme ako množinu všetkých sivých hrán  $e \in E_{S,i}$  takých, že  $e$  vznikla spojením koreňa niektorého najľavejšieho/najpravejšieho (2, 2, 1)-pólu  $B_{i-1}^l(3)[x]$  s koreňom najľavejšieho/najpravejšieho (2, 2, 1)-pólu  $B_{i-1}^l(4)[x]$ .

Množinu hrán  $E_3(G_i)$  definujeme ako  $E_3(G_i) = E_{S,i} - (E_1(G_i) \cup E_2(G_i))$ . Teraz prejdeme k dôkazom pre jednotlivé triedy hrán:

1. Sivá hrana  $e$  je z množiny  $e \in E_1(G_i)$ . Bez ujmy na všeobecnosti  $e$  je v tomto prípade (nejaká) riadna hrana najľavejšieho (2, 2, 1)-pólu  $B_2 = B_{i-1}^l(2)[1]$  a po jej potlačení vznikne (2, 2, 1)-pól  $B_2 \sim e$ .

Pre potreby dôkazu nie je nutné skúmať, aké rôzne farbenia konektorov sú možné v závislosti od potlačenej hrany  $e$ , stačí si zobrať silnejší predpoklad. Predpokladajme, že každý (2, 2, 1)-pól  $B_2 \sim e$  je zafarbitelný pre ľubovoľný z typov farbení  $X_{2,j}$ ,  $1 \leq j \leq 6$ . Dôkaz rozdelíme na prípady  $X_{2,D}$  a  $X_{2,S}$ .

Pri type  $X_{2,D}$  sú hrany na vstupnom/výstupnom konektore zafarbené každá inou farbou. V rámci (2, 2, 1)-pólu  $B_{i-1}$  (2, 2, 1)-pól  $B_2 \sim e$  spájame zľava s Petersenovým negátorom  $B_2$ , ktorý má konektory zafarbitelné len niektorým z typov  $X_{2,S}$ . Pri spájaní jeho vstupný konektor  $S_1$  zjednocujeme s výstupným konektorom (2, 2, 1)-pólom  $B_2 \sim e$ , a preto to bude výstupný konektor  $S_2$ , ktorý má zafarbené obe hrany rovnakou farbou.

---

<sup>5</sup>Typ zafarbenia konektorov  $X_{i,D}$  má obe hrany na vstupnom/výstupnom konektore zafarbené každú inou farbou.

Preto predpokladáme, že výstupný konektor  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e = (B_2 \sim e) \odot B_2$  má zafarbené obe hrany rovnakou farbou.  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  potom spájame zľava s  $(2, 2, 1)$ -pólom  $B_3$ , ktorý má len zafarbenia typu  $X_{3,D}$ . Teda jeho vstupný konektor  $S_1$  musí mať každú hranu zafarbenú inou farbou, čo je v spore s tým, že výstupný konektor  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  má zafarbené obe hrany rovnakou farbou. Tým dospejeme k záveru, že  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e$ , a teda aj výsledný graf  $G_i \sim e$  nie je v tomto prípade hranovo 3-zafarbiteľný.

Druhá možnosť, kedy  $B_2 \sim e$  je typu  $X_{2,S}$  je triviálna. Stačí si uvedomiť, že ak by existovalo zafarbenie grafu  $G_i \sim e$  také, že  $B_2 \sim e$  má konektory zafarbené typom  $X_{2,S}$ , tak by bol zafarbiteľný<sup>6</sup> aj snark  $G_i$ , čo je spor.

2. Sivá hrana  $e$  je z množiny  $e \in E_2(G_i)$ . Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že hrana  $e$  patrí<sup>7</sup> najľavejšiemu  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}^l(3)[1]$ .

Pod  $(2, 2)$ -pólom  $B_3 \sim r = B_{i-1}^l(3)[1] \sim r$  máme na mysli  $(2, 2)$ -pól, ktorý vznikne potlačením reziduálnej hrany  $r$  na  $(2, 2, 1)$ -póle  $B_{i-1}^l(3)[1]$  (pozri obrázok 2.9). Vstupný konektor  $S_1$  má hrany  $S_1 = (e, f)$  a výstupný konektor  $S_2$  má zase hrany  $S_2 = (g, h)$ .

Ďalej pod  $(2, 2, 1)$ -pólom  $B_{i-1}^l(4)[1] \sim e$  máme na mysli  $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne napojením výstupného konektora  $(2, 2)$ -pólu  $B_3 \sim r$  na vstupný konektor  $S_1$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3$ .

Pozrime sa na to, akými spôsobmi vieme zafarbiť hrany na konektoroch  $(2, 2)$ -pólu  $B_3 \sim r$ . Značenia objektov preberáme z obrázku 2.9. Vieme, že oba Peterse-nove negátory  $B_2$  a  $B_2'$  musia byť zafarbené niektorým z typov  $X_{2,S}$ . To znamená, že práve jeden z ne-reziduálnych konektorov pre každý z týchto  $(2, 2, 1)$ -pólov má zafarbené obe hrany rovnakou farbou. Z toho vyplýva, že buď  $c(e) = c(f)$  a súčasne  $c(g) = c(h)$  alebo  $c(k) = c(l)$  a súčasne  $c(e) \neq c(f) \wedge c(g) \neq c(h)$ . Ukážeme teraz, že pre oba prípady je  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^l(4)[1] \sim e$  hranovo nezafarbiteľný.

Prípád kedy  $c(g) = c(h)$ . V tomto prípade má výstupný konektor  $S_2$   $(2, 2)$ -pólu  $B_3 \sim r$  zafarbené obe hrany rovnakou farbou. Súčasne platí, že hrany na konektoroch  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3$  sa dajú zafarbiť len typom  $X_{3,D}$ . Inak povedané jeho vstupný konektor  $S_1$  musí mať obe hrany zafarbené každú inou farbou. Vieme, že tieto dva konektory zjednocujeme, keď konštruujeme  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^l(4)[1]$ . Preto nie je možné  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^l(4)[1]$ , a teda ani výsledný graf  $G_i \sim e$  zafarbiť tromi farbami.

Druhý prípad, kedy  $c(e) \neq c(f) \wedge c(g) \neq c(h)$ . Je ľahké si uvedomiť, že v tomto prípade má  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^l(4)[1] \sim e$  zafarbené obe hrany na vstupnom konek-

<sup>6</sup>Petersenov negátor  $B_2$  je zafarbiteľný len pre zafarbenia konektorov typu  $X_{2,S}$ .

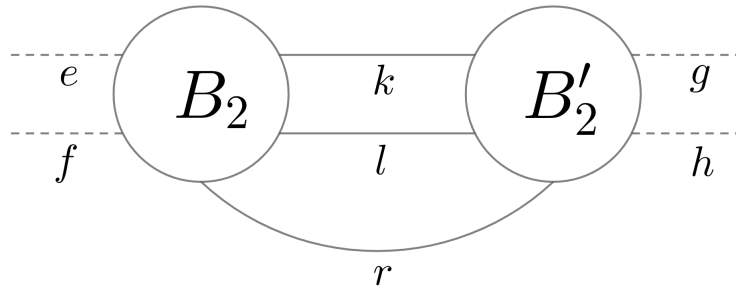
<sup>7</sup>Je jeho reziduálnou hranou  $r$ .

tore každú inou farbou Súčasne vieme, že najpravejší  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}(3)[-1]$  je zafarbiteľný len typu  $X_{3,D}$ . Z toho vyplýva, že výsledný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1} \sim e$  môže byť zafarbiteľný jedine ak, tak pre typy zafarbenia konektorov  $X_{i-1,D}$ . Lenže aj pôvodný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}$  vieme zafarbiť pre ľubovoľný z týchto typov zafarbenia konektorov, a predsa výsledný graf  $G_i$  je hranovo nezafarbiteľný. Preto môžeme usúdiť, že ani v tomto prípade nie je zafarbiteľný výsledný graf  $G_i \sim e$ , lebo ak by bol, bol by zafarbiteľný aj snark  $G_i$ .

3. Množina hrán  $e \in E_3(G_i)$ . Hrany z tejto množiny nie sú súčasťou niektorého z najľavejšieho/najpravejšieho  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}^l(3)[\pm 1]$ ,  $0 \leq l \leq 2$ , ani nevznikli z jeho visiacej hrany. Preto po potlačení ľubovoľnej sivej hrany  $e \in E_3(G_i)$  ostanú  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_{i-1}^l(3)[\pm 1]$  zachované.

Vieme, že ľubovoľný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3$  má možné zafarbenia konektorov len typu  $X_{3,D}$ . Potom ale  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1} \sim e$  nemôže byť zafarbený typom  $X_{i-1,S}$ , lebo jeho vstupný konektor  $S_1$  je totožný so vstupným konektorom  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}(3)[1]$  a výstupný konektor  $S_2$  je zase totožný s výstupným konektorom  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}(3)[-1]$ . Preto výsledný graf  $G_i \sim e$  nie je hranovo 3-zafarbiteľný.

□

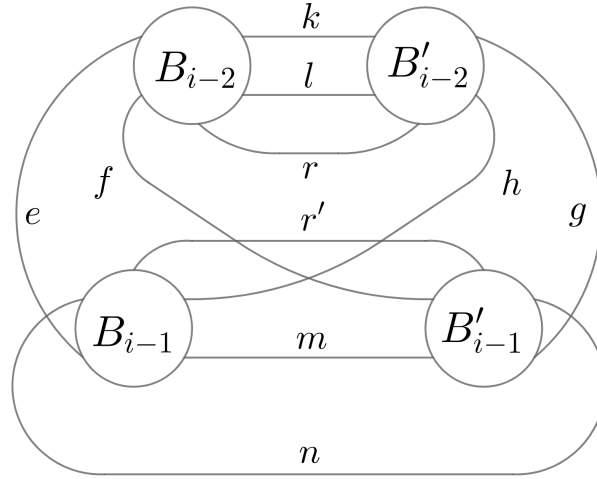


Obr. 2.9:  $(2, 2)$ -pól  $B_3$  po potlačení reziduálnej hrany  $r$

### 2.4.2 Dôkaz pre fialové hrany

Pripomeňme si, že pre fialové hrany  $e \in E_{F,i}$  chceme dokázať, že hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  je pre nasledovná:  $\psi(G_i, e) = 2^{f(i)} \cdot 3^{g(i)}$ , pričom  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 2$  a  $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4}$ .

Môžeme si uvedomiť, že graf  $G_i \sim e$ , ktorý vznikne z rotačného binárneho snarku  $G_i$  potlačením fialovej hrany  $e$  je izomorfný s grafom, ktorý vznikne spojením visiacich hrán dvoch kópií  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-2}$  a dvoch kópií  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}$  tak, ako je vyobrazené na obrázku 2.10.

Obr. 2.10: Rotačný binárny snark  $G_i$  po potlačení fialovej hrany

Nakoľko  $i \geq 6$  vieme, že prípustné zafarbenia konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$  a  $B_{i-2}$  sú len typu  $X_{i-1,D}$  a  $X_{i-2,D}$ . Rozoberme možné hranové farbenia hrán, ktoré nie sú súčasťou žiadneho z  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$  ani  $B_{i-2}$  za predpokladu, že  $(2, 2, 1)$ -póly môžeme zafarbiť len typom  $X_{i-1,D}$  respektíve  $X_{i-2,D}$ . Názvy hrán uvažujeme podľa obrázku 2.10.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zafarbiť hranu  $r$  farbou 1. Vieme, že pri ľubovoľnom z typov  $X_{j,D}$  je reziduálna hrana jednou z troch visiacych hrán, ktoré sú zafarbené rovnakou farbou. Ďalej vieme, že vstupný aj výstupný konektor má zafarbené obe hrany každú inou farbou. Z toho vyplýva, že jedna hrana na vstupnom aj výstupnom konektore musí byť zafarbená farbou 1. Zafixujme si, že zvyšná hrana na vstupnom konektore  $S_1$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-2}$  bude zafarbená farbou 2 a zvyšná hrana na jeho výstupnom konektore  $S_2$  bude zafarbená farbou 3. Týmto sa zrejme nepripravíme o žiadne možné farbenia, ale súčasne máme jednotlivé farby určené dostatočne jednoznačne na to, aby sme nerozoberali aj také farbenia, ktoré vieme získať z iných farbení permutáciou farieb.

Na základe týchto predpokladov existujú štyri zafarbenia konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-2}$ :

- Vstupný konektor  $S_1 = (e, f)$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-2}$  je zafarbený farbami  $c(S_1) = (1, 2)$  a výstupný konektor  $S_2 = (k, l)$  je zafarbený farbami  $c(S_2) = (1, 3)$ . Potom výstupný konektor  $S_2 = (h, g)$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B'_{i-2}$  môže byť zafarbený buď  $c(S_2) = (2, 1)$  alebo  $c(S_2) = (1, 2)$ , lebo  $B'_{i-2}$  musí mať zafarbenie konektorov typu  $X_{i-2,D}$ .

Ak  $c(S_2) = (2, 1)$ , potom hrany  $f, g$  sú zafarbené farbou  $c(f) = c(g) = 2$ . Z toho vyplýva, že hrana  $r'$  musí byť zafarbená tiež farbou 2. Lenže súčasne platí  $c(e) = c(h) = 1$ , z čoho vyplýva, že reziduálna hrana  $r'$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}$  musí

byť zafarbená farbou 1, čo je spor. Preto v tomto prípade neexistuje zafarbenie výsledného grafu.

Prípad kedy  $c(S_2) = (1, 2)$  rozoberáme na konci zoznamu, súčasne pre všetky štyri možnosti, nakoľko ho je možné zovšeobecniť.

- Zafarbenie vstupného konektoru  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-2}$  je  $c(S_1) = (1, 2)$  a výstupného  $c(S_2) = (3, 1)$ . Potom zafarbenie hrán  $g, h$  môže byť  $c(g) = 2$  a  $c(h) = 1$  alebo  $c(g) = 1$  a  $c(h) = 2$ .

Ak  $c(g) = 2$  a  $c(h) = 1$  dospejeme analogickými úvahami k záveru, že hrana  $r'$  by musela byť súčasne zafarbená farbou 1 a 2, čo je spor.

Prípad kedy  $c(g) = 1$  a  $c(h) = 2$  rozoberáme na konci, spoločne pre všetky možnosti.

- Zafarbenie vstupného konektoru  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-2}$  je  $c(S_1) = (2, 1)$  a výstupného  $c(S_2) = (1, 3)$ . Potom zafarbenie hrán  $g, h$  môže byť  $c(g) = 1$  a  $c(h) = 2$  alebo  $c(g) = 2$  a  $c(h) = 1$ .

Ak  $c(g) = 1$  a  $c(h) = 2$  dospejeme analogickými úvahami k záveru, že hrana  $r'$  by musela byť súčasne zafarbená farbou 1 a 2, čo je spor.

Prípad kedy  $c(g) = 2$  a  $c(h) = 1$  rozoberáme na konci, spoločne pre všetky možnosti.

- Zafarbenie vstupného konektoru  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-2}$  je  $c(S_1) = (2, 1)$  a výstupného  $c(S_2) = (3, 1)$ . Potom zafarbenie hrán  $g, h$  môže byť  $c(g) = 1$  a  $c(h) = 2$  alebo  $c(g) = 2$  a  $c(h) = 1$ .

Ak  $c(g) = 1$  a  $c(h) = 2$  dospejeme analogickými úvahami k záveru, že hrana  $r'$  by musela byť súčasne zafarbená farbou 1 a 2, čo je spor.

Prípad kedy  $c(g) = 2$  a  $c(h) = 1$  rozoberáme na konci, spoločne pre všetky možnosti.

Teraz zovšeobecnením naraz rozoberieme prípad, ktorý sme si u všetkých štyroch možnosti nechali na neskôr. Môžeme si všimnúť, že u všetkých štyroch prípadov sú hrany  $e, g$  zafarbené nejakou farbou  $c(e) = c(g) = a$ , zatiaľ čo hrany  $f, h$  sú zafarbené farbou  $c(f) = c(h) = b$ , pričom  $a \neq b$ . Nech tretia farba je formálne značená ako  $c$ . V závislosti od toho, či hranu  $r'$  zafarbíme farbou  $a, b$  alebo  $c$  dostaneme jednoznačné farbenie zvyšných hrán  $m, n$ , ktoré vyplýva z toho, že  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_{i-1}$  a  $B'_{i-1}$  môžu mať konektory zafarbené len typom  $X_{i-1, D}$ .

Konkrétne, ak  $c(r') = a$ , potom sú  $B_{i-1}$  aj  $B'_{i-1}$  typu  $X_{i-1, 1}$  a hrany  $m, n$  zafarbíme farbami  $c(m) = a, c(n) = c$ .

Naopak ak  $c(r') = b$ , potom sú  $B_{i-1}$  aj  $B'_{i-1}$  typu  $X_{i-1, 3}$  a  $c(m) = 3, c(n) = 2$ .

Pri poslednej možnosti  $c(r') = c$  musia mať  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_{i-1}$  a  $B'_{i-1}$  zafarbené konektory typom  $X_{i-1,2}$ , čo implikuje  $c(m) = c(n) = 3$ .

Tým pádom pri každom zo štyroch prípadov dospejeme k rovnakému záveru, že existujú tri rôzne zafarbenia hrán, ktoré nie sú súčasťou žiadneho z  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$  ani  $B_{i-2}$ . Dokopy preto existuje 12 rôznych zafarbení týchto hrán, ak predpokladáme, že  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_{i-1}$  a  $B_{i-2}$  majú konektory zafarbené typom  $X_{i-1,D}$  respektíve  $X_{i-2,D}$  a neuvažujeme permutácie farieb.

Vieme, že ak neuvažujeme permutácie farieb, potom hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  získame ako počet možných hranových farbení grafu  $G_i \sim e$  predelený číslom 3. Vzhľadom na to, že zafarbenia v rámci jednotlivých  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$  a  $B_{i-2}$  sú od seba pri fixnom zafarbení hrán na konektoroch nezávislé, výsledný počet farbení získame ako súčin:

$$\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot X_{i-1,D}^2 \cdot X_{i-2,D}^2 = 4 \cdot (2^{2^{i-4}-1} \cdot 3^{2^{i-4}})^2 \cdot (2^{2^{i-5}-1} \cdot 3^{2^{i-5}})^2 = 2^{3 \cdot 2^{i-4}-2} \cdot 3^{3 \cdot 2^{i-4}}.$$

Odtiaľ dostávame, že  $\psi(G_i, e) = 2^{f(i)} \cdot 3^{g(i)}$ , pričom  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 2$ ,  $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4}$ .

### 2.4.3 Dôkaz pre modré hrany

Začneme tým, že urobíme analýzu počtu rôznych hranových 3-farbení  $(1, 2, 1)$ -pólov a  $(2, 1, 1)$ -pólov  $B_i \sim e$ , ktoré vzniknú z  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  potlačením niektorej z visiacich hrán na vstupnom alebo výstupnom konektore. Počty rôznych hranových 3-farbení budeme počítat v závislosti do zafarbenia hrán na konektoroch. Myšlienka celkovej analýzy je založená na rekurentných vzťahoch a je podobná tej, ako sme počítali počty u hranových 3-farbení na  $(2, 2, 1)$ -póloch  $B_i$ .

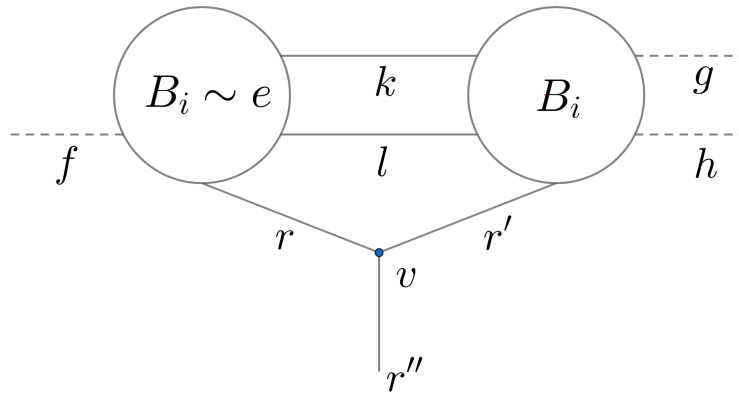
Budeme uvažovať, že  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i$  má konektory  $S_1 = (e, f)$ ,  $S_2 = (g, h)$  a  $S_3 = (r)$ . Analýzu urobíme poriadne len pre  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim e$ , nakoľko zvyšné multipóly  $B_2 \sim f$ ,  $B_2 \sim g$  a  $B_2 \sim h$  ju majú myšlienkovo v podstate rovnakú. Pripomeňme si, že rozbor možných farbení  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_2 \sim e_2$  sme už urobili v predošlej kapitole (pozri obrázok 2.5 a tabuľku 2.3). Pre potreby ďalšieho smerovania dôkazu je pre nás výhodné si  $(1, 2, 1)$ -póly  $B_i \sim e$ ,  $i \geq 3$  zadefinovať nasledovným rekurentným spôsobom:

Nech  $i \geq 3$  je ľubovoľné celé číslo. Predpokladajme, že už vieme skonštruovať  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1} \sim e$ . Potom pod  $(1, 2, 1)$ -pólom  $B_i \sim e$  máme na mysli taký  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim e = (B_{i-1} \sim e) \odot B_{i-1}$ , ktorý vznikne spojením  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1} \sim e$  s  $(2, 2, 1)$ -pólom  $B_{i-1}$ . Pre lepšiu predstavu pozri obrázok 2.11.



Počty rôznych hranových farbení pre jednotlivé typy zafarbení konektorov  $X_{i,a}(e)$ ,  $a \in \{A, B, C, D\}$  pre  $i \geq 3$  určíme na dvakrát. Najprv pre  $i = 3$  a následne pre ostatné hodnoty.

Pre  $i = 3$  určíme hodnoty len pre typy  $X_{3,C}(e)$  a  $X_{3,D}(e)$ . Hodnoty ostatných typov nebudeme pri dôkaze potrebovať. Dôvodom za tým je to, že  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3$ , na ktorom potlačíme hranu  $e$  nie je výsledný  $(2, 2, 1)$ -pól, z ktorého je zložený snark  $G_i$ , ale sa zľava spája s ďalším  $(2, 2, 1)$ -pólom  $B_3$ . Ten je zafarbitelný len pre typy  $X_{3,D}$ , a teda hrany na jeho vstupnom konektore  $S_1$  sú zafarbené každá inou farbou. Z toho vyplýva, že hrany na výstupnom konektore  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  musia byť zafarbené tiež každá inou farbou. Preto jedinými potenciálne vyhovujúcimi typmi zafarbení konektorov sú  $X_{3,C}(e)$  a  $X_{3,D}(e)$ .



Obr. 2.11:  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_{i+1} \sim e$

Vieme, že  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  vznikne ako  $B_3 \sim e = (B_2 \sim e) \odot B_2$ .  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2$  má po jednom zafarbení pre ľubovoľný z typov  $X_{2,S}$ , ktoré sú špecifické tým, že obe hrany na jednom z nereziduálnych konektorov sú zafarbené rovnakou farbou (pozri tabuľku 2.2). Vieme, že v tomto prípade to bude vstupný konektor, nakoľko výsledný  $(1, 2, 1)$ -pól je typu  $X_{3,C}(e)$  alebo  $X_{3,D}(e)$ . Z toho vyplýva, že  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim e$  môže byť zafarbený len typmi  $X_{2,A}(e)$  alebo  $X_{2,B}(e)$ . O hodnotách typu  $X_{2,A}(e)$  a  $X_{2,B}(e)$  platí  $X_{2,A}(e) = 0$  a  $X_{2,B}(e) = 1$  (pozri tabuľku 2.3). Dá sa potom ukázať, že ak si zafixujeme farby na konektoroch výsledného  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$ , tak existujú štyri možné zafarbenia, po dve pre oba typy. Inak povedané,  $X_{3,C}(e) = X_{3,D}(e) = 2$ .

Detailnejší rozbor: nech  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  je typu  $X_{3,C}(e)$ . Potom bez ujmy na všeobecnosti  $c(f) = c(g) = 1$  a  $c(h) = c(r'') = 2$ . Keďže  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim e$  je typu  $X_{2,B}(e)$ , môžu byť hrany  $k, l$  zafarbené obe buď farbou 2 alebo farbou 3. V prvom prípade je  $(2, 2, 1)$ -pól typu  $X_{2,5}$  a v druhom typu  $X_{2,4}$ , čo sú všetky možnosti. Preto  $X_{3,C}(e) = 2$ .

Analogicky dospejeme k záveru, že pre  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  typu  $X_{3,D}(e)$  existujú dve rôzne vnútorné zafarbenia. Vieme, že v oboch prípadoch je  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim e$

typu  $X_{2,B}(e)$ . Ak je jeho výstupný konektor zafarbený farbou 2, potom je  $(2, 2, 1)$ -pól typu  $X_{2,6}$ , a ak je jeho výstupný konektor zafarbený farbou 3, potom je  $(2, 2, 1)$ -pól typu  $X_{2,4}$ .

Analýzu pre  $(1, 2, 1)$ -póly  $B_i \sim e$ ,  $i \geq 4$  spravíme cez pomocnú lemu, ktorú dokážeme pomocou matematickej indukcie. Myšlienkovu podobný dôkaz sa využije s drobnými úpravami aj pri dôkaze Kászonyiho funkcie pre ostávajúce typy hrán. Preto ho prvýkrát spravíme poriadne a následne sa na myšlienky z neho budeme už len odvolávať.

**Lema 2.4.4.** *Nech  $B_i \sim e$  je  $(1, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikol z  $(2, 2, 1)$ -pólu potlačením hrany  $e$  vstupného konektoru  $S_1 = (e, f)$  pre  $i \geq 3$ . Potom pre počty rôznych hranových 3-farbení pre jednotlivé typy zafarbenia konektorov platia vzťahy:  $X_{i,A}(e) = X_{i,B}(e) = 0$  a  $X_{i,C}(e) = X_{i,D}(e) = 2^{g(i)} \cdot 3^{f(i)}$ , pričom  $g(i) = 2^{i-3}$  a  $f(i) = 2^{i-3} - 1$ .*

*Dôkaz.* Dôkaz urobíme matematickou indukciou. Pre bázu  $i = 3$  stačí overiť, že hodnoty  $X_{3,C}(e) = X_{3,D}(e) = 2$  vyhovujú vyššie uvedeným vzťahom.

Pre  $i \geq 3$  je dôkaz pre typy  $X_{i,A}(e) = X_{i,B}(e) = 0$  pomerne ľahký. Vieme, že  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim e$  vznikne spojením  $B_i \sim e = (B_{i-1} \sim e) \odot B_{i-1}$ . Ďalej vieme, že prípustné farbenia konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}$  sú len typu  $X_{i-1,D}$ , teda také pri ktorých sú obe hrany zafarbené každá inou farbou. Z toho môžeme usúdiť, že výsledný  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim e$  nie je možné zafarbiť pred tie typy zafarbenia konektorov, kde sú obe hrany na výstupnom konektore zafarbené rovnakou farbou. Preto  $X_{i,A}(e) = X_{i,B}(e) = 0$ .

Pre dôkaz zvyšných dvoch typov využijeme rekurentné vzťahy. Farbenia  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1} \sim e$  budeme počítať v závislosti od počtu farbení pre typy zafarbenia konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}$  a  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_i \sim e$ . Názvy hrán preberáme z obrázku 2.11.

Rozoberme najprv prípad, kedy  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim e$  má konektory zafarbené typom  $X_{i,C}(e)$ . Bez ujmy na všeobecnosti sú v tomto prípade hrany  $f, g, h, r''$  zafarbené nasledovným spôsobom:  $c(f) = c(g) = 1$  a  $c(h) = c(r'') = 2$ . Máme teraz dve možnosti ako zafarbiť konektory  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1} \sim e$ . Ak ich zafarbíme typom  $X_{i-1,C}(e)$ , potom dostávame  $c(k) = 1$  a  $c(l) = c(r) = 3$ . Z toho vyplýva, že  $B_{i-1}$  musí byť typu  $X_{i-1,1}$ . V druhom prípade ak  $B_{i-1} \sim e$  je typu  $X_{i-1,D}(e)$  platí, že  $c(k) = c(r) = 3$  a  $c(l) = 1$ , a teda  $B_{i-1}$  je typu  $X_{i-1,2}$ .

Analogickými úvahami sa dá dospieť k záveru, že ak  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim e$  má konektory zafarbené typom  $X_{i,D}(e)$ , tak potom možné zafarbenia konektorov multipólov  $B_{i-1} \sim e$  a  $B_{i-1}$  sú nasledovné: buď  $B_{i-1} \sim e$  je typu  $X_{i-1,C}(e)$  a  $B_{i-1}$  je typu  $X_{i-1,2}$ , alebo  $B_{i-1} \sim e$  je typu  $X_{i-1,D}(e)$  a  $B_{i-1}$  je typu  $X_{i-1,3}$ .

Zvyšok vyriešime využitím indukčného predpokladu:

$$\begin{aligned} X_{i,C}(e) &= X_{i-1,C}(e) \cdot X_{i-1,1} + X_{i-1,D}(e) \cdot X_{i-1,2} = (X_{i-1,C}(e) + X_{i-1,D}(e)) \cdot (X_{i-1,D}) = \\ &= 2 \cdot (2^{g(i-1)} \cdot 3^{f(i-1)}) \cdot 2^{f(i-1)} \cdot 3^{g(i-1)} = 2^{2^{i-3}} \cdot 3^{2^{i-3}-1}. \end{aligned}$$

$$X_{i,D}(e) = X_{i-1,C}(e) \cdot X_{i-1,2} + X_{i-1,D}(e) \cdot X_{i-1,3} = \dots = 2^{2^{i-3}} \cdot 3^{2^{i-3}-1}.$$

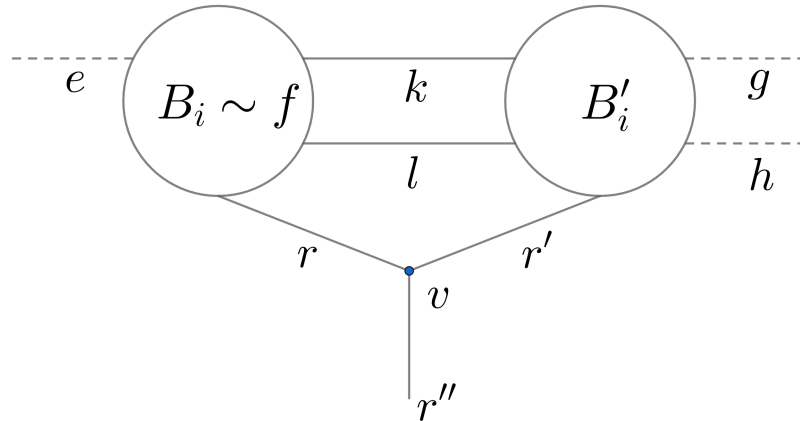
Odtiaľ dostávame požadované hodnoty funkcií  $g(i) = 2^{i-3}$  a  $f(i) = 2^{i-3} - 1$ .  $\square$

Prejdime teraz k analýze  $(1, 2, 1)$ -pólom  $B_i \sim f$  (pozri obrázok 2.12), ktoré vzniknú potlačením visiacej hrany  $f$  na  $(2, 2, 1)$ -póle  $B_i$ . Postup je rovnaký ako v predošlom prípade. Začneme analýzou farbení  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim f = (B_2 \sim f_2) \odot B_2$ , pričom využitím argumentov ako v predošlom prípade prídeme k záveru, že nás zaujímajú len počty farbení typu  $X_{3,C}(f)$  a  $X_{3,D}(f)$ .

Môžeme nahliadnuť, že oba typy zafarbení konektorov je možné získať, len ak zafarbíme konektory  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim f_2$  typom  $X_{2,A}(f_2)$  alebo  $X_{2,B}(f_2)$ . Ďalej vieme, že typ  $X_{2,A}(f_2)$  má nula hranových zafarbení (pozri tabuľku 2.3). Následne je ľahké obdobným rozborom ako v predošlom prípade prísť na to, že  $X_{3,C}(f) = X_{3,D}(f) = 2$ . Pre ilustratívnosť, jednotlivé zafarbenia vieme získať nasledovným spôsobom:

$$X_{3,C}(f) = X_{2,B}(f_2) \cdot (X_{2,4} + X_{2,5}) = 1 + 1 = 2$$

$$X_{3,D}(f) = X_{2,B}(f_2) \cdot (X_{2,4} + X_{2,6}) = 1 + 1 = 2$$



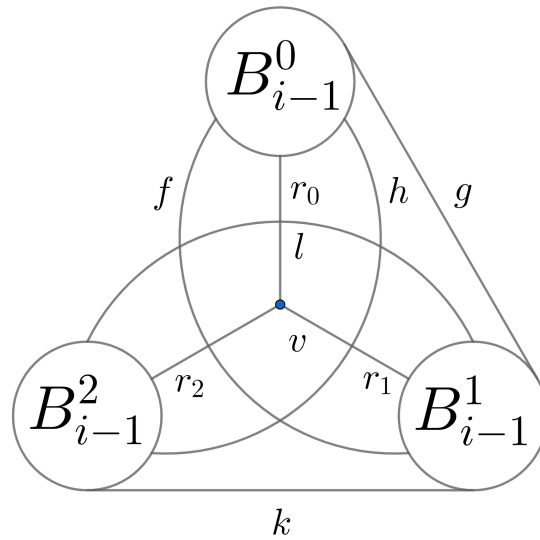
Obr. 2.12:  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_{i+1} \sim f$

Všimnime si, že hodnoty farbení  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim f$  sú rovnaké ako to bolo aj pri  $(1, 2, 1)$ -póle  $B_3 \sim e$ . Z toho dôvodu je postup dôkazu od tohto bodu analogický s dôkazom farbení pre  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim e$ . Jeho záverom je, že platia nasledovné rovnosti vzťahov:  $X_{i,C}(f) = X_{i,D}(f) = X_{i,C}(e) = X_{i,D}(e)$ .

Pri analýze farbení  $(2, 1, 1)$ -pólov  $B_i \sim g$  a  $B_i \sim h$  si stačí si uvedomiť, že medzi každým  $(1, 2, 1)$ -pólom  $B_i \sim e$  a  $(2, 1, 1)$ -pólom  $B_i \sim g$  pre fixné  $i$  existuje zobrazenie  $\rho'$ , ktoré zachováva štruktúru grafu a len vymení vstupný a výstupný konektor. Analogický argument môžeme použiť pre  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim f$  a  $(2, 1, 1)$ -pól  $B_i \sim h$ .

Preto platí:  $X_{i,C}(g) = X_{i,D}(g) = X_{i,C}(h) = X_{i,D}(h) = X_{i,C}(e) = X_{i,D}(e)$ .

Na záver ostáva rozobrať možné farbenia grafu  $G_i \sim e$ , ktorý vznikne potlačením modrej hrany  $e$  z obrázka 2.13 na rotačnom binárnom snarku  $G_i$ . Je ľahké nahliadnuť, že výsledný počet hranových 3-farbení bude rovnaký aj pre ostatné potlačené modré hrany.



Obr. 2.13: Rotačný binárny snark  $G_i$  po potlačení modrej hrany  $e$ .

Ak neuvažujeme permutácie farieb<sup>8</sup> u hrán vyznačených na obrázku 2.13, potom existujú tri rôzne zafarbenia vyznačených hrán výsledného grafu  $G_i \sim e$  (zatiaľ neuvažujeme farbenia riadnych hrán v rámci multipólov).

V prvom prípade, ak má  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^0 \sim e$  zafarbenie konektorov typu  $X_{i-1,C}(e)$  a  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^2 \sim e$  zafarbenie typu  $X_{i-1,D}(e)$ , bude  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^1$  typu  $X_{i-1,2}$ . Zafarbenie hrán je  $c(r_0) = c(h) = c(l) = 1$ ,  $c(r_1) = c(f) = c(g) = 2$  a  $c(r_2) = c(k) = 3$ .

V prípade ak  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^0 \sim e$  je typu  $X_{i-1,D}(e)$  a  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^2 \sim e$  typu  $X_{i-1,C}(e)$ , bude  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^1$  typu  $X_{i-1,2}$ . Zafarbenie hrán je  $c(r_0) = c(g) = 1$ ,  $c(r_1) = c(k) = c(l) = 2$  a  $c(r_2) = c(f) = c(h) = 3$ .

V treťom prípade sú oba  $(1, 2, 1)$ -póly typu  $X_{i-1,D}(e)$ .  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^1$  je potom typu  $X_{i-1,3}$  a zafarbenie hrán je  $c(r_0) = c(g) = 1$ ,  $c(r_1) = c(f) = c(h) = c(l) = 2$  a  $c(r_2) = c(k) = 3$ .

<sup>8</sup>Zafixujeme si napríklad  $c(r_0) = 1$ ,  $c(r_1) = 2$ ,  $c(r_2) = 3$ .

Ešte si uvedomme, že oba  $(1, 2, 1)$ -póly  $B_{i-1}^0 \sim e$  a  $B_{i-1}^2 \sim e$  nemôžu byť naraz typu  $X_{i-1,C}(e)$ , lebo potom by sme hranu  $h$  museli naraz zafarbiť farbami 1 a 3, čo je v spore s definíciou farbenia.

Je ľahké nahliadnuť, že ak neuvažujeme permutácie farieb, potom zafixovanie farieb okolo centrálného vrchola a následný výber typu zafarbenia konektorov  $(1, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}^0 \sim e$  a  $B_{i-1}^2 \sim e$  jednoznačne určuje zafarbenie všetkých hrán, ktoré nie sú riadnou hranou žiadneho z multipólov na obrázku 2.13.

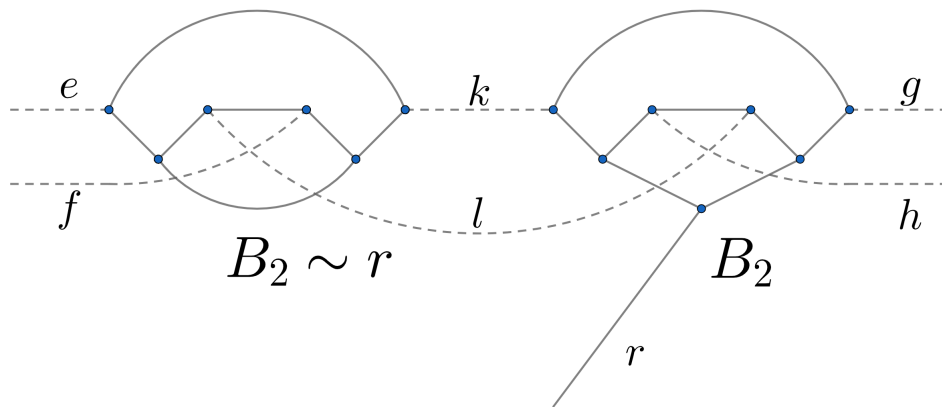
Nakoľko neuvažujeme permutácie farieb, hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  pre modré hrany  $e \in E_{M,i}$  získame ako počet možných hranových farbení grafu  $G_i \sim e$  predelený číslom 3, teda:

$$\psi(G_i, e) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot X_{i-1,C}(e)^2 \cdot X_{i-1,D} = 2^{2^{i-4}-1} \cdot 3^{2^{i-4}} \cdot (2^{2^{i-4}} \cdot 3^{2^{i-4}-1})^2 = 2^{3 \cdot 2^{i-4}-1} \cdot 3^{3 \cdot 2^{i-4}-2}.$$

#### 2.4.4 Dôkaz pre zelené hrany

Dôkaz je myšlienkovovo veľmi podobný dôkazu modrých hrán, preto sa v ňom zameriame len na tie časti, ktoré sú v niečom iné. Pôjde predovšetkým o rozbor farbení niektorých menších multipólov. Dôkaz urobíme len pre zelenú hranu, ktorá vznikla napojením visiacej hrany  $r$  najľavejšieho Petersenovho negátoru  $B_2 = B_{i-1}(2)[1]$  na koreň  $v = v(B_{i-1}(3)[1])$  najľavejšieho  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 = B_{i-1}(3)[x]$ . Dôkaz pre „najpravejšiu“ zelenú hranu je analogický.

Začnime rozborom počtu rôznych hranových farbení  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$ , kde  $e$  je zelená hrana (pozri obrázok 2.14).  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  je možné definovať aj ako  $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne napojením hrán výstupného konektora  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$  na Petersenov negátor  $B_2$ . Takáto definícia  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  je pre analýzu možných farbení  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  výhodnejšia.



Obr. 2.14:  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  ako napojenie  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$  na  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2$

Pripomeňme si, že farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$  sme už rozobrali v predošlej kapitole.

Je možné si ich pozrieť v tabuľke 2.3. Taktiež poznáme možné farbenia  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_2$  (pozri tabuľku 2.2).

Ďalej si pripomeňme, že na to, aby mohol byť výsledný graf  $G_i \sim e$  zafarbiteľný musí byť  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1} \sim e$  zafarbiteľný pre niektorý z typov zafarbení konektorov  $X_{i-1,S}$ . Súčasne vieme, že najpravejší  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3$  je možné zafarbiť len typom  $X_{3,D}$ . Preto požadujeme, aby vstupný konektor  $S_1$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1} \sim e$ , ktorý je súčasne vstupným konektorom  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$  mal zafarbené obe hrany rovnakou farbou.

Tým pádom nám stačí rozobrať farbenia  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  typu  $X_{3,S}$  také, že hrany zafarbené rovnakou farbou sú hrany  $e$  a  $f$  zo vstupného konektoru  $S_1$ .

Pre každý z typov  $X_{3,4}$ ,  $X_{3,5}$  a  $X_{3,6}$  existujú štyri rôzne zafarbenia vnútorných hrán  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  a je ich možné získať nasledovným spôsobom:

$$X_{3,4} = X_{2,\alpha} \cdot X_{2,6} + X_{2,\alpha} \cdot X_{2,5} + X_{2,\delta} \cdot X_{2,4} = 1 + 1 + 2 = 4.$$

$$X_{3,5} = X_{2,\alpha} \cdot X_{2,4} + X_{2,\alpha} \cdot X_{2,6} + X_{2,\delta} \cdot X_{2,5} = 4.$$

$$X_{3,6} = X_{2,\alpha} \cdot X_{2,4} + X_{2,\alpha} \cdot X_{2,5} + X_{2,\delta} \cdot X_{2,6} = 4.$$

Analýzu počtov farbení pre  $(1, 2, 1)$ -póly  $B_i \sim e$  pre  $i \geq 4$  spravíme cez pomocnú lemu. Dôkaz je myšlienkovy podobný dôkazu Lemy 2.4.3 pre modré hrany, preto ho uvádzame v skrátenej forme.

**Lema 2.4.5.** *Nech pre  $i \geq 3$  je  $B_i \sim e$   $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikol potlačením „ľavej“ zelenej hrany. Potom pre počty rôznych hranových 3-farbení pre jednotlivé typy zafarbenia konektorov typu  $X_{i,S}$  platí  $X_{i,S} = 2^{f(i)} \cdot 3^{g(i)}$ , pričom  $f(i) = 2^{i-3} + i - 2$  a  $g(i) = 2^{i-3} - 1$ .*

*Dôkaz.* Idea dôkazu spočíva v tom, že  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1} \sim e$  spájame zľava s  $(2, 2, 1)$ -pólom  $B_{i-1}$ , o ktorom vieme, že je zafarbiteľný len pre typy konektorov  $X_{i-1,D}$ . Počty rôznych farbení pre jednotlivé zafarbenia konektorov už poznáme, je možné si ich pripomenúť z tabuľky 2.2.

Ľahko overíme, že pre bázu  $i = 3$  vzťah platí. Následne pomocou matematickej indukcie využitím rekurentných vzťahov z tabuľky 2.2 je možné dokázať, že pre  $i \geq 4$  platí vyššie zmienený vzťah. Pre lepšiu predstavu ukážeme, ako vieme vypočítať počet farbení pre zafarbenie konektorov typom  $X_{i,4}$ . Zvyšné dva typy  $X_{i,5}$  a  $X_{i,6}$  je možné dokázať obdobným spôsobom.

$$\begin{aligned} X_{i,4} &= X_{i-1,5} \cdot X_{i-1,1} + X_{i-1,5} \cdot X_{i-1,2} + X_{i-1,6} \cdot X_{i-1,2} + X_{i-1,6} \cdot X_{i-1,3} = \\ &= 4 \cdot 2^{2^{i-4}+i-3} \cdot 3^{2^{i-4}-1} \cdot 2^{2^{i-4}-1} \cdot 3^{2^{i-4}} = 2^{2^{i-3}+i-2} \cdot 3^{2^{i-3}-1}. \end{aligned}$$

□

Pre určenie výsledného počtu hranových farbení rotačného binárneho snarku  $G_i$  (pre pripomenutie pozri obrázky 2.3) po potlačení zelenej hrany  $e$  je potrebné urobiť rozbor, v ktorom určíme počet hranových farbení výsledného grafu  $G_i \sim e$  za

predpokladu, že jeden z jeho  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1} \sim e$  je zafarbiteľný len pre zafarbenia konektorov typu  $X_{i-1,S}$  a zvyšné dva  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_{i-1}$  sú zafarbiteľné zase len pre zafarbenia konektorov typu  $X_{i-1,D}$ . Rozbor urobíme dôkladne, nakoľko sa naň budeme odvolávať ešte aj neskôr – pri dôkaze pre červené a oranžové hrany. Pri rozbere ako zvyčajne neuvažujeme permutácie farieb na konektoroch.

Bez ujmy na všeobecnosti nech  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^0$  je ten, v ktorom potláčame hranu  $e$  a ktorému farbíme konektory typom  $X_{i-1,S}$ . Ďalej môžeme predpokladať, že hrany na jeho vstupnom konektore sú zafarbené rovnakou farbou. Rozbor pre druhú možnosť je analogický. Značenie hrán pri rozbere preberáme z obrázku 2.3.

Začnime rozbor možnosťou, kedy  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^0$  má hrany na konektoroch zafarbené typom  $X_{i-1,4}$ . Aby sme sa vyhli permutáciám farieb môžeme predpokladať, že  $c(e) = c(f) = c(r_0) = 1$ ,  $c(g) = 2$  a  $c(h) = 3$ . V tomto prípade musí  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^1$  mať zafarbené konektory typom  $X_{i-1,1}$  a  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^2$  bude zase typu  $X_{i-1,3}$ . Toto farbenie je jednoznačné a zafarbí ostávajúce hrany, ktoré nie sú riadnymi hranami niektorého z  $(2, 2, 1)$ -pólov nasledovným spôsobom:  $c(k) = c(r_1) = 2$  a  $c(l) = c(r_2) = 3$ . Iné možnosti pre  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}$  nie sú, pretože ak by sme zafarbili konektory  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^1$  typom  $X_{i-1,2}$  alebo typom  $X_{i-1,3}$ , tak potom ostávajúcemu  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}^2$  by sme vedeli dofarbiť konektory len typom  $X_{i-1,S}$ , čo nepripúšťame.

Rozoberme teraz možnosť kedy je  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^0$  typu  $X_{i-1,5}$ . Ak si zafixujeme farby, tak vyskúšaním všetkých troch možných typov zafarbení  $X_{i-1,1}$ ,  $X_{i-1,2}$  a  $X_{i-1,3}$  konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}^1$  dospejeme k záveru, že jediná prípustná možnosť je zafarbenie typu  $X_{i-1,1}$ . Vtedy je  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^2$  zafarbený typom  $X_{i-1,2}$ . Výsledné zafarbenie hrán je nasledovné:  $c(e) = c(f) = c(h) = c(r_2) = 1$ ,  $c(g) = c(k) = c(r_1) = 2$  a  $c(l) = c(r_0) = 3$ .

Pri poslednej možnosti je zafarbenie konektorov  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i-1}^0$  typu  $X_{i-1,6}$ . Vyskúšaním možných zafarbení konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}^1$  typmi  $X_{i-1,D}$  dospejeme k záveru, že jediné prípustné farbenie konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólu je  $X_{i-1,2}$ . V tomto prípade je  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}^2$  zafarbený typom  $X_{i-1,3}$  a farbenie hrán je nasledovné:  $c(e) = c(f) = c(g) = c(r_1) = 1$ ,  $c(h) = c(l) = c(r_2) = 2$  a  $c(k) = c(r_0) = 3$ .

Záverom našej analýzy je, že ak neuvažujeme permutácie farieb, tak pre každý z typov farbení  $X_{i-1,S}$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}^0$  existuje jediné zafarbenie hrán na konektoroch zvyšných dvoch  $(2, 2, 1)$ -pólov.

Keď poznáme možné farbenia hrán na konektoroch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}^0$ ,  $B_{i-1}^1$  a  $B_{i-1}^2$ , vieme vyčísliť celkový počet hranových 3-farbení na rotačnom binárnom snarku  $G_i$  po potlačení zelenej hrany  $e$ . Nakoľko neuvažujeme permutácie farieb, hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  pre zelené hrany získame ako počet hranových farbení grafu  $G_i \sim e$  vydedený číslom 3, teda ako:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \cdot (X_{i-1,4} \cdot X_{i-1,1} \cdot X_{i-1,3} + X_{i-1,5} \cdot X_{i-1,1} \cdot X_{i-1,2} + X_{i-1,6} \cdot X_{i-1,2} \cdot X_{i-1,3}) = \\ & = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot X_{i-1,S} \cdot X_{i-1,D}^2 = \frac{1}{3} 2^{2^{i-4}+i-3} \cdot 3^{2^{i-4}-1} \cdot (2^{2^{i-4}-1} \cdot 3^{2^{i-4}})^2 = 2^{3 \cdot 2^{i-4}+i-5} \cdot 3^{3 \cdot 2^{i-4}-1}. \end{aligned}$$

### 2.4.5 Dôkaz pre červené hrany

Dôkaz pre červené hrany urobíme len pre „najľavejšie“ červené hrany. Dôkaz pre najpravejšie červené hrany je analogický. Samotný dôkaz rozdelíme na dve časti:

1. dôkaz červených hrán, ktoré sú riadnymi hranami druhého najľavejšieho Petersenovho negátoru  $B_{i-1}(2)[2]$ ,
2. dôkaz červenej hrany, ktorá vznikla napojením visiacej hrany  $r$  druhého najľavejšieho Petersenovho negátoru  $B_2 = B_{i-1}(2)[2]$  na koreň  $v(B_{i-1}(3)[1])$  najľavejšieho  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}(3)[1]$ .

**Prvá časť dôkazu červených hrán.** Uvedomme si, že riadne hrany Petersenovho negátora  $B_2$  tvoria zjednotenie dvoch 5-cyklov  $C_5^1 = v_1v_2v_4v_7v_3v_1$  a  $C_5^2 = v_1v_2v_5v_6v_3v_1$ . To nám umožní využiť Kászonyiho tvrdenie 1.1.3, ktoré hovorí, že hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  je pre tieto hrany rovnaká. Preto nám stačí rozobrať možné hranové farbenia grafu  $G_i \sim e$  po potlačení jednej z týchto hrán, napríklad hrany  $e = v_1v_2$ .

Možné farbenia  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_2 \sim e$  po potlačení riadnej hrany  $e = v_1v_2$  sme už rozobrali v predošlej kapitole a je možné si ich prezrieť v tabuľke 2.3.

Potrebuje zistiť počet hranových farbení  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  ktorý vznikne tak, že  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim e$  sprava spojíme s Petersenovým negátorom. Požadujeme pri tom, aby  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  mal konektory zafarbené typom  $X_{3,S}$  a aby hrany na vstupnom konektore boli obe zafarbené rovnakou farbou (argumentácia za tým je rovnaká ako u zelených hrán).

Nie je ťažké overiť, že počty týchto farbení vieme získať nasledovným spôsobom:

$$X_{3,4} = X_{2,5} \cdot X_{2,2}(e) + X_{2,6} \cdot X_{2,2}(e)' + X_{2,5} \cdot X_{2,1}(e) + X_{2,6} \cdot X_{2,3}(e)$$

$$X_{3,5} = X_{2,6} \cdot X_{2,2}(e) + X_{2,4} \cdot X_{2,2}(e)' + X_{2,4} \cdot X_{2,1}(e) + X_{2,5} \cdot X_{2,3}(e)$$

$$X_{3,6} = X_{2,4} \cdot X_{2,2}(e) + X_{2,5} \cdot X_{2,2}(e)' + X_{2,6} \cdot X_{2,1}(e) + X_{2,4} \cdot X_{2,3}(e).$$

Dosadením hodnôt z tabuľky 2.3 za premenné  $X_{2,j}(e)$ ,  $j = 1, 2, 3$  pridáme na to, že výsledný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  má tri rôzne zafarbenia pre ľubovoľný z uvažovaných typov zafarbení konektorov, teda  $X_{3,4} = X_{3,5} = X_{3,6} = X_{3,S} = 3$ .



Dôkaz od tohto momentu kopíruje dôkaz pre zelené hrany, len s inými vstupnými hodnotami pre zafarbenia konektorov typu  $X_{3,S}$ . Najprv využitím rovnakých rekurentných vzťahov zistíme počty farbení typu  $X_{i,S}$  pre  $(2, 2, 1)$ -póly  $B_i \sim e$  pre  $i \geq 4$ , a následne určíme výsledný počet farbení grafu  $G_i \sim e$ .

Rozdiel oproti dôkazu zelených hrán je len v tom, že počiatočný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  po potlačení červenej hrany  $e = v_1v_2$  má tri rôzne farbenia pre každý z typov  $X_{3,S}$ , zatiaľ čo pri zelených hranách má počiatočný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e_Z$  po potlačení zelenej hrany  $e_Z$  štyri rôzne farbenia z typov  $X_{3,S}$ .

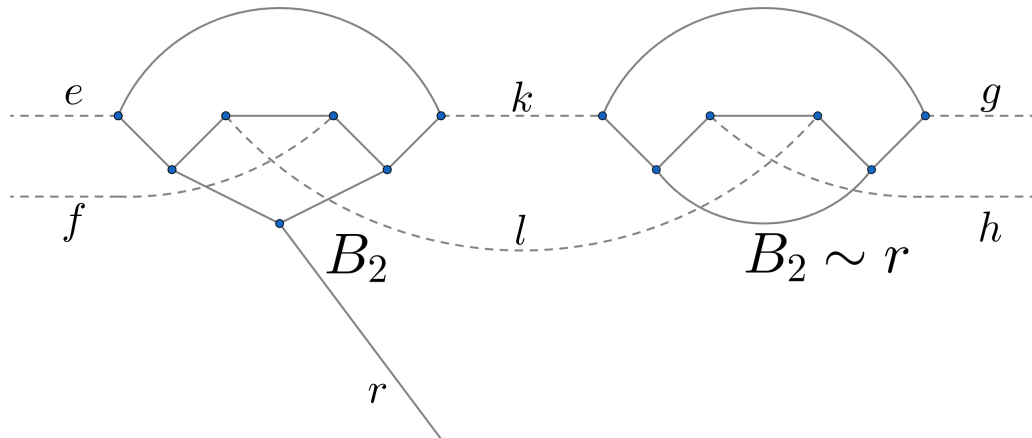
Preto ak nejaký typ farbenia  $X_{i,j}$ ,  $j = 4, 5, 6$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i \sim e_Z$  po potlačení zelenej hrany  $e_Z$  má  $F(i, j)$  farbení, tak ten istý typ  $X_{i,j}$  pre  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim e$  po potlačení ľubovoľnej červenej hrany  $e$  bude mať  $3/4 \cdot F(i, j)$  farbení.

Z tohto vyplýva, že hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  pre túto množinu červených hrán je  $3/4 \cdot \psi(G_i, e_Z)$ , kde  $\psi(G_i, e_Z)$  je hodnota Kászonyiho funkcie rotačného binárneho snarku  $G_i$  pre zelené hrany. Odtiaľ dostávame:

$$\psi(G_i, e) = 3/4 \cdot \psi(G_i, e_Z) = 2^{3 \cdot 2^{i-4} + i - 7} \cdot 3^{3 \cdot 2^{i-4}}.$$

**V druhej časti dôkazu** rozoberáme počet farbení grafu  $G_i$  po potlačení červenej hrany, ktorá vznikla napojením visiacej hrany  $r$  druhého najľavejšieho Petersenovho negátoru  $B_2 = B_{i-1}(2)[2]$  na koreň  $v(B_{i-1}(3)[1])$  najľavejšieho  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}(3)[1]$ . Táto časť dôkazu je tiež veľmi podobná dôkazu u zelených hrán. Začneme tým, že sa pozrieme na  $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne potlačením tejto červenej hrany  $e$ .

$(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  po potlačení červenej hrany  $e$  je  $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne napojením vstupného konektora  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$  na výstupný konektor Petersenovho negátoru  $B_2$  (pozri obrázok 2.15).



Obr. 2.15:  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  ako napojenie  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_2$  na  $(2, 2)$ -pól  $B_2 \sim r$

Opäť nás zaujímajú len tie farbenia hrán na konektoroch  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$ , u ktorých má vstupný konektor  $S_1$  zafarbené obe hrany rovnakou farbou.

Jednotlivé farbenia  $(2, 2)$ -pólu  $B_2 \sim r$  sme rozobrali už v predošlej kapitole a je možné si ich pripomenúť v tabuľke 2.3. Tiež poznáme možné farbenia  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_2$  (pozri tabuľku 2.2).

Nie je ťažké overiť, že pre každý z typov  $X_{3,4}$ ,  $X_{3,5}$  a  $X_{3,6}$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  existujú tri rôzne farbenia. Tieto farbenia vieme získať nasledovným spôsobom:  $X_{3,4} = X_{2,4} \cdot X_{2,\gamma} = 3$ ,  $X_{3,5} = X_{2,5} \cdot X_{2,\gamma} = 3$  a  $X_{3,6} = X_{2,6} \cdot X_{2,\gamma} = 3$ .

Následne už analogickými úvahami ako v predošlom prípade je možné dospieť k záveru, že hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  pre túto červenú hranu rotačného binárny snark  $G_i$  je tiež  $\psi(G_i, e) = 2^{3 \cdot 2^{i-4} + i - 7} \cdot 3^{3 \cdot 2^{i-4}}$ .

### 2.4.6 Dôkaz pre oranžové hrany

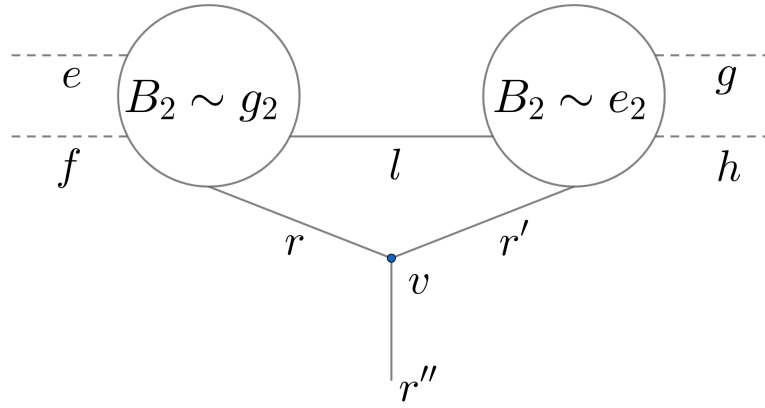
Dôkaz spravíme len pre štyri ľavé oranžové hrany z množiny  $E_2$ . Dôkaz pre zvyšné štyri pravé oranžové hrany z množiny  $E_{-2}$  je myšlienkovito analogický.

Pre pripomenutie, množina štyroch ľavých oranžových hrán  $E_2$  na  $(2, 2, 1)$ -póle  $B_{i-1}$  je množina tých štyroch oranžových hrán, ktoré vznikli spojením niektorej zo štyroch visiacych hrán vstupného alebo výstupného konektora druhého najľavejšieho Petersenovho negátoru  $B_2 = B_{i-1}(2)[2]$  s visiacyou hranou susedného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}(2)[1]$  respektíve  $B_{i-1}(2)[3]$ .

Dôkaz sa líši pre rôzne oranžové hrany, preto ho urobíme na viackrát. Aby sme sa lepšie vedeli odkazovať na to, ktorú hranu práve rozoberáme pracovne si pomenujeme každú z týchto štyroch hrán. Predpokladajme, že hrany druhého najľavejšieho Petersenovho negátoru  $B_2 = B_{i-1}(2)[2]$  sú pomenované obvyklým spôsobom (pozri obrázok 2.1). Potom oranžovú hranu, ktorá vznikne z visiacej hrany  $e_2$  nazývame *horná ľavá oranžová hrana*. Obdobným spôsobom definujeme postupne hrany, ktoré vzniknú z visiacych hrán  $f_2$ ,  $g_2$  a  $h_2$  ako *dolnú ľavú*, *hornú pravú* a *dolnú pravú oranžovú hranu*.

**Dôkaz pre hornú ľavú oranžovú hranu.** Najľavejší  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$ , ktorý vznikne potlačením hornej ľavej oranžovej hrany  $e$  si vieme zadefinovať aj ako  $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne zlúčením  $(2, 1, 1)$ -pól  $u_{B_2} \sim g_2$  s  $(1, 2, 1)$ -pólom  $B_2 \sim e_2$  (pozri obrázok 2.16). Táto definícia je pre analýzu počtov farbení výhodnejšia, lebo poznáme počty farbení multipólov  $B_2 \sim g_2$  a  $B_2 \sim e_2$  (pozri tabuľku 2.3). Pre pripomenutie,  $(2, 1, 1)$ -pól  $B_2 \sim g_2$  má rovnaké počty farbení pre jednotlivé typy zafarbení konektorov ako  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_2 \sim e_2$ .

Ako sme už argumentovali v dôkazoch pre predošlé typy hrán, na to, aby bol výsledný graf  $G_i \sim e$  zafarbiteľný vyžadujeme od najľavejšieho  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  aby bol typu  $X_{3,s}$  a aby na jeho vstupnom konektore boli zafarbené obe hrany rovnakou

Obr. 2.16:  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  po potlačení hornej ľavej oranžovej hrany  $e$ 

farbou. Jednotlivé typy zafarbení konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  je možné získať zo zafarbení menších multipólov nasledovným spôsobom:

$$X_{3,4} = X_{2,B}(e_2) \cdot X_{2,C}(g_2) + X_{2,B}(e_2) \cdot X_{2,D}(g_2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3,$$

$$X_{3,5} = X_{2,B}(e_2) \cdot X_{2,C}(g_2) = 1 \cdot 1 = 1, \quad X_{3,6} = X_{2,B}(e_2) \cdot X_{2,D}(g_2) = 1 \cdot 2 = 2.$$

*Poznámka 2.4.6.* V predošlom odseku tvrdíme, že je možné získať typ  $X_{3,4}$  aj typ  $X_{3,5}$  pomocou toho istého typu zafarbenia konektorov na menších multipóloch  $B_2 \sim g_2$  a  $B_2 \sim e_2$ . Je to skutočne tak, pretože výsledný typ zafarbenia konektorov  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  nezávisí len od typu zafarbenia konektorov menších multipólov, ale aj od toho, akými farbami zafarbíme jednotlivé hrany vyznačené na obrázku 2.16.

Ak zafarbíme  $c(e) = c(f) = c(r'') = 1$ ,  $c(l) = c(r) = c(g) = 2$  a  $c(r') = c(h) = 3$ , potom sú konektory multipólov  $B_2 \sim g_2$  a  $B_2 \sim e_2$  zafarbené typmi  $X_{2,B}(e_2)$  a  $X_{2,C}(g_2)$  a výsledný multipól je typu  $X_{3,4}$ .

Na druhej strane ak zafarbíme  $c(e) = c(f) = c(r') = c(h) = 1$ ,  $c(r'') = 2$  a  $c(l) = c(r) = c(g) = 3$  tak potom sú konektory multipólov  $B_2 \sim g_2$  a  $B_2 \sim e_2$  tiež zafarbené typmi  $X_{2,B}(e_2)$  a  $X_{2,C}(g_2)$ , ale výsledný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  je typu  $X_{3,5}$ .

Obdobne to funguje aj pre zafarbenia konektorov multipólov  $B_2 \sim g_2$  a  $B_2 \sim e_2$  typmi  $X_{2,B}(e_2)$  a  $X_{2,D}(g_2)$ .

Teraz keď poznáme počty farbení  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  pre jednotlivé typy zafarbení konektorov  $X_{3,4} = 3$ ,  $X_{3,5} = 1$  a  $X_{3,6} = 2$  vieme využitím rekurentných vzťahov dokázať pomocnú lemu, ktorá nám určí počet hranových 3-farbení pre rôzne typy zafarbenia konektorov typu  $X_{i,S}$  pre ľubovoľný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim e$  pre  $i \geq 4$ . Lemu vyslovíme bez dôkazu, nakoľko sa v dôkaze len opakujú myšlienky z obdobnej Lemy 2.4.4 pre zelené hrany a inak je dôkaz iba jednoduchým cvičením matematickej indukcie.

**Lema 2.4.7.** *Nech pre  $i \geq 4$  je  $B_i \sim e$   $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikol potlačením ľavej hornej oranžovej hrany. Potom pre počty rôznych hranových 3-farbení pre jednotlivé*

typy zafarbenia konektorov typu  $X_{i,S}$  platia nasledovné vzťahy:

$$X_{i,4} = 2^{2^{i-3}-3} \cdot 3^{2^{i-3}-1} \cdot (2^i - 4 \cdot (-1)^i)$$

$$X_{i,5} = X_{i,6} = 2^{2^{i-3}-3} \cdot 3^{2^{i-3}-1} \cdot (2^i + 2 \cdot (-1)^i)$$

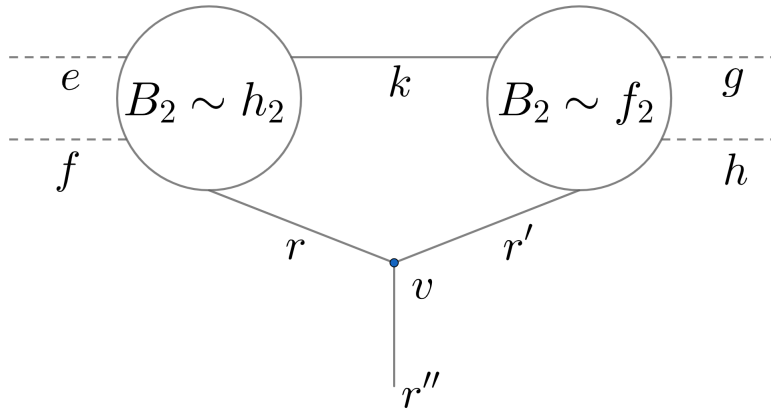
Nakoľko vieme, že pre každý zo zafarbení konektorov  $X_{i-1,S}$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1} \sim e$  existuje jediná možnosť ako dofarbiť tie hrany grafu  $G_i \sim e$ , ktoré vznikli spojením visiacych hrán (a ich napojením na centrálny vrchol), tak potom výsledný počet farbení grafu  $G_i \sim e$  získame ako:

$$\begin{aligned} & X_{i-1,4} \cdot X_{i-1,1} \cdot X_{i-1,3} + X_{i-1,5} \cdot X_{i-1,1} \cdot X_{i-1,2} + X_{i-1,6} \cdot X_{i-1,2} \cdot X_{i-1,3} = \\ & = (X_{i-1,4} + X_{i-1,5} + X_{i-1,6}) \cdot X_{i-1,D}^2 = 2^{2^{i-4}+i-4} \cdot 3^{2^{i-4}} \cdot (2^{2^{i-4}-1} \cdot 3^{2^{i-4}})^2 = 2^{3 \cdot 2^{i-4}+i-6} \cdot 3^{3 \cdot 2^{i-4}} \end{aligned}$$

Odtiaľ vieme rovno určiť hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  ako:

$$\psi(G_i, e) = \frac{1}{3} \cdot 2^{3 \cdot 2^{i-4}+i-6} \cdot 3^{3 \cdot 2^{i-4}} = 2^{3 \cdot 2^{i-4}+i-6} \cdot 3^{3 \cdot 2^{i-4}-1}.$$

**Dôkaz pre dolnú ľavú oranžovú hranu.** Dôkaz je podobný dôkazu pre hornú pravú oranžovú hranu, preto ho uvádzame v skrátenej forme.  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  po potlačení dolnej ľavej oranžovej je izomorfný s  $(2, 2, 1)$ -pólom, ktorý vznikne spojením  $(2, 1, 1)$ -pólu  $B_2 \sim h_2$  a  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_2 \sim f_2$  (pozri obrázok 2.17).



Obr. 2.17:  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3 \sim e$  po potlačení dolnej ľavej oranžovej hrany  $e$

Farbenia týchto multipólov už poznáme, môžeme si ich pripomenúť z tabuľky 2.3. Ako obvykle, od  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3 \sim e$  požadujeme, aby mal hrany na vstupnom konektore zafarbené rovnakou farbou. Potom počty farbení pre jednotlivé typy zafarbenia konektorov  $X_{3,S}$  vieme získať cez nasledovné vzťahy:

$$X_{3,4} = X_{2,B}(h_2) \cdot X_{2,D}(f_2) + X_{2,B}(h_2) \cdot X_{2,C}(f_2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3,$$

$$X_{3,5} = X_{2,B}(h_2) \cdot X_{2,C}(f_2) = 2 \cdot 1 = 1, \quad X_{3,6} = X_{2,B}(h_2) \cdot X_{2,D}(f_2) = 1 \cdot 2 = 1.$$

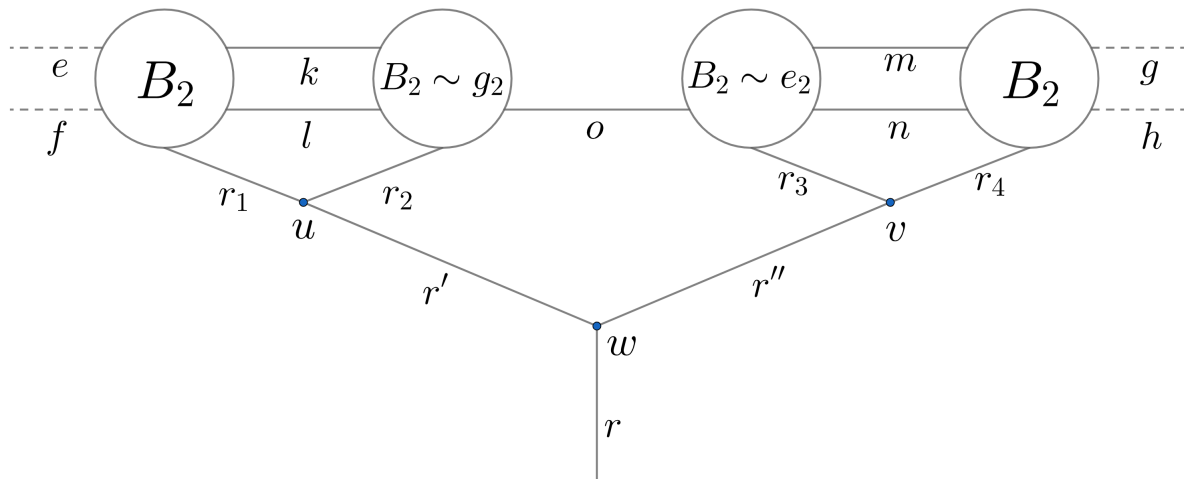
Ak teraz pomocou rekurentných vzťahov vyčíslíme hodnoty pre typy  $X_{4,s}$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e = (B_3 \sim e) \odot B_3$  zistíme, že  $X_{4,4} = 18$  a  $X_{4,5} = X_{4,6} = 27$ . To sú rovnaké hodnoty ako má  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e'$  po potlačení hornej ľavej oranžovej hrany  $e'$  (pre overenie pozri Lemu 2.4.6).

Preto pre  $i \geq 5$  už môžeme využiť Lemu 2.4.6 a následne dospieť záveru, že hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  je rovnaká pre obe ľavé oranžové hrany.

**Dôkaz pre hornú pravú oranžovú hranu.** V porovnaní s predošlými dôkazmi je najmenším  $(2, 2, 1)$ -pólom  $B_i$ , ktorý obsahuje hornú pravú oranžovú hranu ako riadnu hranu až  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4$ . Preto budeme musieť rozobrať väčší počet farbení, kým budeme vedieť dôkaz zautomatizovať využitím rekurentných vzťahov.

Začnime tým, že si najľavejší  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e = B_{i-1}(4)[1] \sim e$  po potlačení hornej pravej oranžovej hrany zdefinujeme aj ako  $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne postupným spojením štyroch konkrétnych multipólov. Tento spôsob definície je výhodnejší pre potreby analýzy počtu hranových farbení na tomto  $(2, 2, 1)$ -póle.

$(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e$  po potlačení hornej pravej oranžovej hrany  $e$  definujeme aj ako  $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikne postupným spojením dvoch kópií Petersenovho negátoru  $B_2$ ,  $(2, 1, 1)$ -pólu  $B_2 \sim g_2$  a  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_2 \sim e_2$  v nasledovnom poradí:  $B_4 \sim e = (B_2 \odot (B_2 \sim g_2)) \odot ((B_2 \sim e_2) \odot B_2)$ . Konštrukciu  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e$  je možné si pozrieť na obrázku 2.18. Z tohto obrázku používame aj značenia hrán pri rozbere jednotlivých možných farbení.



Obr. 2.18:  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e$  po potlačení hornej pravej oranžovej hrany  $e$

Na to, aby bol výsledný graf  $G_i \sim e$  zafarbiteľný požadujeme od  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e$ , aby mal konektory zafarbené niektorým z typov  $X_{4,s}$  a aby hrany na vstupnom konektore  $S_1 = (e, f)$  boli zafarbené rovnakou farbou. Argumentácia za tým je rovnaká

ako v predošlých dôkazoch.

Začnime postupnou analýzou farbení pre menšie multipóly v rámci  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e$ . Počty farbení pre jednotlivé multipóly  $B_2$ ,  $B_2 \sim g_2$  a  $B_2 \sim e_2$  poznáme. Teraz rozoberieme počty farbení pre  $(2, 1, 1)$ -pól  $B_3^L = B_2 \odot (B_2 \sim g_2)$  a  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_3^P = (B_2 \sim e_2) \odot B_2$ , a to v závislosti od zafarbenia konektorov.

Od  $(2, 1, 1)$ -pólu  $B_3^L$  požadujeme aby mal hrany  $e$  a  $f$  zafarbené rovnakou farbou. Preto nás zaujímajú len farbenia konektorov typu  $X_{3,A}(e)$  a  $X_{3,B}(e)$ . Pri  $(1, 2, 1)$ -póle  $B_3^R$  zase požadujeme, aby mal hrany  $g$  a  $h$  zafarbené rôznou farbou. Zaujímajú nás teda farbenia konektorov typu  $X_{3,C}(e)$  a  $X_{3,D}(e)$ .

Výhodou je, že počty farbení konektorov typu  $X_{3,C}(e)$  a  $X_{3,D}(e)$  na  $(1, 2, 1)$ -póle izomorfnom s  $B_3^R$  sme už zanalyzovali pri dôkaze modrých hrán. Vieme, že  $X_{3,C}(e) = X_{3,D}(e) = 2$ .

Analýzu farbení typu  $X_{3,A}(e)$  a  $X_{3,B}(e)$  pre  $(2, 1, 1)$ -pól  $B_3^L$  spravíme teraz. Ukážeme, že pre typ  $X_{3,A}(e)$  existuje farbenie  $(2, 1, 1)$ -pólu  $B_3^L$ . Uvedomme si najprv, že Petersenov negátor  $B_2$  nemôžeme zafarbiť typom  $X_{4,2}$ , lebo potom by hrany  $r_1$  a  $r'$  boli zafarbené rovnakou farbou, čo je spor.

Ak zafarbíme  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2$  typom  $X_{2,5}$ , potom musí byť  $(2, 1, 1)$ -pól  $B_2 \sim g_2$  typu  $X_{2,D}(e)$ , pričom máme voľnosť v tom ako dofarbíme<sup>9</sup> hrany  $k$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  farbami 2 a 3. Môžeme si vybrať buď  $c(k) = c(r_2) = 2$  a  $c(r_1) = 3$  alebo  $c(k) = c(r_2) = 3$  a  $c(r_1) = 2$ .

Na druhej strane ak  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2$  zafarbíme typom  $X_{2,6}$ , potom musí byť  $(2, 1, 1)$ -pól  $B_2 \sim g_2$  typu  $X_{2,C}(e)$ , pričom opäť máme voľnosť v tom, ako dofarbíme hrany  $l$ ,  $r_1$  a  $r_2$ .

Výsledný počet farbení typu  $X_{3,A}(e)$  je potom  $X_{3,A}(e) = 2 \cdot X_{2,5} \cdot X_{2,D}(e) + 2 \cdot X_{2,6} \cdot X_{2,C}(e) = 4 + 2 = 6$ .

Pre typ  $X_{3,B}(e)$  je rozbor jednoduchší, pričom existuje tiež šesť možností ako zafarbiť výsledný  $(2, 1, 1)$ -pól  $B_3^L$ . Farbenia sa dajú získať nasledovným spôsobom:  $X_{3,B}(e) = X_{2,4} \cdot X_{2,C}(e) + X_{2,4} \cdot X_{2,D}(e) + X_{2,5} \cdot X_{2,C}(e) + X_{2,6} \cdot X_{2,D}(e) = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$ .

Keď už poznáme počty farbení pre jednotlivé uvažované zafarbenia konektorov multipólov  $B_3^L$  a  $B_3^P$ , môžeme sa pozrieť na výsledný počet farbení  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e$ , ktorý vznikne ich spojením. Pripomeňme si, že od  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e$  požadujeme, aby bol typu  $X_{4,S}$  a aby hrany na vstupnom konektore boli zafarbené rovnakou farbou.

V tomto prípade platí, že pri fixnom zafarbení konektorov výsledného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e$ , nám určenie typu farbenia multipólov  $B_3^L$  a  $B_3^P$  jednoznačne určí farbenie výsledného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e$ . Počet farbení pre jednotlivé typy zafarbení typu  $X_{4,S}$

<sup>9</sup>Predpokladáme, že  $c(e) = c(f) = c(r') = c(o) = c(l) = 1$

získame nasledujúcim spôsobom:

$$X_{4,4} = X_{3,B} \cdot X_{3,D} + X_{3,B} \cdot X_{3,C} = 12 + 12 = 24$$

$$X_{4,5} = X_{3,A} \cdot X_{3,D} + X_{3,B} \cdot X_{3,C} = 12 + 12 = 24$$

$$X_{4,6} = X_{3,A} \cdot X_{3,C} + X_{3,B} \cdot X_{3,D} = 12 + 12 = 24.$$

*Poznámka 2.4.8.* Poradie výrazov pri násobení nie je svojvoľné. Určujeme ním zafarbenie konektorov pre jednotlivé multipóly  $B_3^L$  a  $B_3^P$ . Presnejšie ľavý výraz u operácie násobenia prislúcha zafarbeniu konektorov  $(2, 1, 1)$ -pólu  $B_3^L$  a pravý výraz zase určuje zafarbenie konektorov  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_3^P$ .

Teraz môžeme využitím rekurentných vzťahov vypočítať hodnoty  $X_{i,j}$ ,  $j = 4, 5, 6$  pre ľubovoľný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_i \sim e$ . Lemu uvedieme bez dôkazu. Dôkaz je analogický s predošlými obdobnými dôkazmi a je len ľahkým cvičením matematickej indukcie.

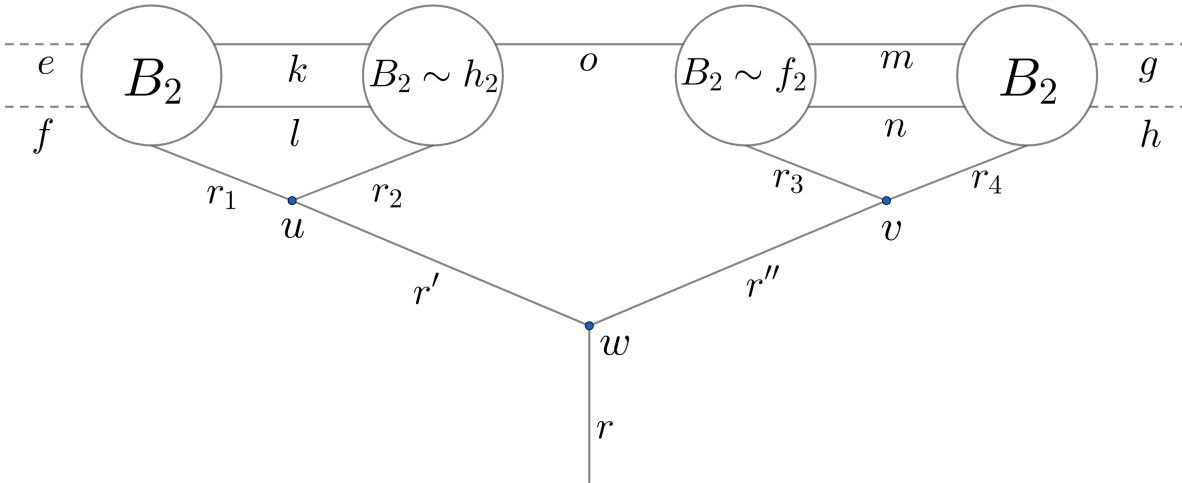
**Lema 2.4.9.** *Nech pre  $i \geq 4$  je  $B_i \sim e$   $(2, 2, 1)$ -pól, ktorý vznikol potlačením „pravej hornej“ oranžovej hrany. Potom pre počty rôznych hranových 3-farbení pre jednotlivé typy zafarbenia konektorov  $X_{i,s}$  platia nasledovné vzťahy:  $X_{i,4} = X_{i,5} = X_{i,6} = X_{i,s} = 2^{f(i)} \cdot 3^{g(i)}$ , pričom  $f(i) = 2^{i-3} + i - 3$  a  $g(i) = 2^{i-3} - 1$ .*

Využitím tejto lemy vieme následne vypočítať počet hranových farbení grafu  $G_i \sim e$  a teda aj hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  pre pravú hornú oranžovú hranu:

$$\begin{aligned} \psi(G_i, e) &= \frac{1}{3} \cdot (X_{i-1,4} \cdot X_{i-1,1} \cdot X_{i-1,3} + X_{i-1,5} \cdot X_{i-1,1} \cdot X_{i-1,2} + X_{i-1,6} \cdot X_{i-1,2} \cdot X_{i-1,3}) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot X_{i-1,s} \cdot X_{i-1,D}^2 = 2^{2^{i-4}+i-4} \cdot 3^{2^{i-4}-1} \cdot (2^{2^{i-4}-1} \cdot 3^{2^{i-4}})^2 = 2^{3 \cdot 2^{i-4}+i-6} 3^{3 \cdot 2^{i-4}-1}. \end{aligned}$$

**Dôkaz pre dolnú pravú oranžovú hranu.** Postup dôkazu je rovnaký ako v predošlom prípade pre hornú pravú oranžovú hranu. Najprv si zadefinujeme  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e$  s potlačenou dolnou pravou oranžovou hranou  $e$  spôsobom, ktorý je výhodnejší pre počítanie počtu farbení. Následne urobíme analýzu farbení pre menšie multipóly a  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e$ . Na konci tejto analýzy nám vyjdú nasledovné počty farbení typu  $X_{4,s}$ :  $X_{4,4} = X_{4,5} = X_{4,6} = X_{4,s} = 24$ , čo sú rovnaké hodnoty ako v predošlom prípade. To nám umožní využiť Lemu 2.4.6 z predošlého prípadu a dospieť k záveru, že aj pre dolnú pravú oranžovú hranu je hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e) = 2^{3 \cdot 2^{i-4}+i-6} 3^{3 \cdot 2^{i-4}-1}$ .

Začnime analýzou počtu farbení  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e$ , ktorý definujeme ako postupné spojenie štyroch menších multipólov – dvoch Petersenových negátorov  $B_2$ ,  $(2, 1, 1)$ -pólu  $B_2 \sim h_2$  a  $(1, 2, 1)$ -pólu  $B_2 \sim f_2$ . Tieto multipóly spájame v nasledovnom poradí:  $B_4 \sim e = (B_2 \odot (B_2 \sim h_2)) \odot ((B_2 \sim f_2) \odot B_2)$ . Pre lepšiu predstavu výsledného

Obr. 2.19:  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e$  po potlačení dolnej pravej oranžovej hrany  $e$ 

multipólu je možné si ho pozrieť na obrázku 2.19. Názvy hrán počas analýzy farbení preberáme z tohto obrázku.

Vieme, že na to, aby bol výsledný graf  $G_i \sim e$  zafarbiteľný požadujeme od  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e$ , aby mal hrany na vstupnom konektore  $S_1 = (e, f)$  zafarbené rovnakou farbou, a teda bol typu  $X_{4,S}$ .

Teraz spravíme analýzu farbení pre menšie multipóly pričom nás budú zaujímať len tie typy zafarbení konektorov, z ktorých je možné „vyskladať“ výsledný  $(2, 2, 1)$ -pól  $B_4 \sim e$  tak, aby platili vyššie zmienené predpoklady pre zafarbenie jeho konektorov.

Najprv rozoberieme počty farbení pre jednotlivé typy zafarbení konektorov pre  $(2, 1, 1)$ -pól  $B_3^L = B_2 \odot (B_2 \sim h_2)$  a  $(1, 2, 1)$ -pól  $B_3^P = (B_2 \sim f_2) \odot B_2$ . U  $(2, 1, 1)$ -pólu  $B_3^L$  nás zaujímajú farbenia konektorov typu  $X_{3,A}(e)$  a  $X_{3,B}(e)$  a pri  $(1, 2, 1)$ -póle  $B_3^R$  zase farbenia konektorov typu  $X_{3,C}(e)$  a  $X_{3,D}(e)$ .

Výhodou je, že počty farbení konektorov typu  $X_{3,C}(e)$  a  $X_{3,D}(e)$  na  $(1, 2, 1)$ -póle izomorfnom s  $(1, 2, 1)$ -pólom  $B_3^R$  sme zanalyzovali už pri dôkaze modrých hrán. Vieme, že  $X_{3,C}(f) = X_{3,D}(f) = 2$ . Preto nám stačí urobiť analýzu farbení konektorov typov  $X_{3,A}(e)$  a  $X_{3,B}(e)$  na  $(2, 1, 1)$ -póle  $B_3^L$ . Počty zafarbení týchto konektorov vieme vypočítať nasledovným spôsobom:

$$X_{3,A}(e) = 2 \cdot X_{2,5} \cdot X_{2,D}(e) + 2 \cdot X_{2,6} \cdot X_{2,C}(e) = 2 + 4 = 6$$

$$X_{3,B}(e) = X_{2,4} \cdot X_{2,C}(e) + X_{2,4} \cdot X_{2,D}(e) + X_{2,5} \cdot X_{2,C}(e) + X_{2,6} \cdot X_{2,D}(e) = 2 + 1 + 2 + 1 = 6.$$

Keď poznáme počty farbení multipólov  $B_3^L$  a  $B_3^P$  je možné z nich zistiť počty farbení pre konektory typu  $X_{4,S}$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4 \sim e$  nasledovným spôsobom:

$$X_{4,4} = X_{3,B} \cdot X_{3,D} + X_{3,B} \cdot X_{3,C} = 12 + 12 = 24$$

$$X_{4,5} = X_{3,A} \cdot X_{3,D} + X_{3,B} \cdot X_{3,C} = 12 + 12 = 24$$



$$X_{4,6} = X_{3,A} \cdot X_{3,C} + X_{3,B} \cdot X_{3,D} = 12 + 12 = 24.$$

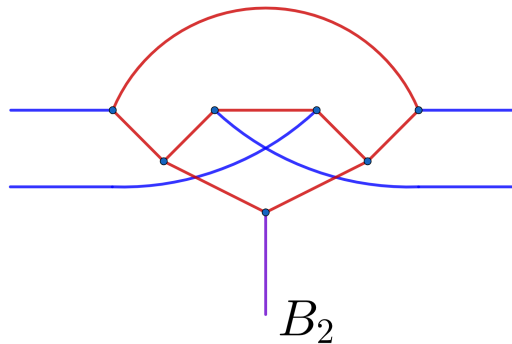
Teraz už môžeme využiť Lemu 2.4.6 a určiť počet farbení pre ľubovoľné zafarbenie konektorov typu  $X_{i,S}$   $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i \sim e$  pre  $i \geq 4$  a následne určiť hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  pre dolnú pravú oranžovú hranu  $e$ . Výsledná hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_i, e)$  pre dolnú pravú oranžovú hranu  $e$  je potom:

$$\psi(G_i, e) = 2^{3 \cdot 2^{i-4} + i - 6} 3^{3 \cdot 2^{i-4} - 1}.$$

### 2.4.7 Hodnoty Kászonyiho funkcie pre malé rotačné binárne snarky

V poslednej podkapitole určíme hodnoty Kászonyiho funkcie pre štyri najmenšie rotačné binárne snarky  $G_2, G_3, G_4$  a  $G_5$ . Pripomeňme si, že najmenší rotačný binárny snark  $G_2$  je Petersenov graf. Hodnoty Kászonyiho funkcie pre Petersenov graf určil už L. Kászonyi (pozri tvrdenie 1.1.2). Pre zvyšné tri snarky  $G_3, G_4$  a  $G_5$  najprv pomocou obrázka obdopovedajúceho  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_2, B_3$ , respektíve  $B_4$  rozdelíme hrany do tried a následne priradíme hodnoty Kászonyiho funkcie hranám z jednotlivých tried. Je zrejmé, že ak poznáme hodnoty Kászonyiho funkcie pre hrany jedného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_{i-1}$  prislúchajúcemu rotačnému binárnemu snarku  $G_i$ , tak vieme odvodiť hodnoty Kászonyiho funkcie pre celý rotačný binárny snark.

Zaradenie hrán do tried často nemá veľa spoločného s piatimi triedami, ktoré sme definovali pre rotačné binárne snarky  $G_i$  pre  $i \geq 6$ .

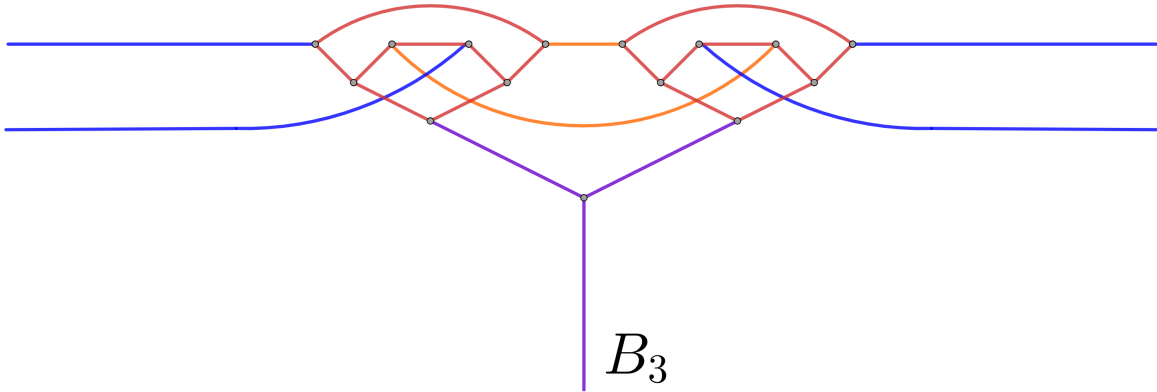


Obr. 2.20: Grafické rozdelenie hrán rotačného binárneho snarku  $G_3$  do tried pomocou jedného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_2$

Hrany rotačného binárneho snarku  $G_3$  rozdeľujeme do troch tried na základe obrázku 2.20. Z farebnej vizualizácie tiež vyplývajú názvy tried – *fialové*, *červené* a *modré* hrany.

Hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_3, e)$  na rotačnom binárnem snarku  $G_3$  v závislosti od príslušnosti hrany  $e$  do niektorej z troch tried je nasledovná:

- $\psi(G_3, e) = 7$ , ak  $e$  je fialová hrana,
- $\psi(G_3, e) = 4$ , ak  $e$  je modrá hrana,
- $\psi(G_3, e) = 3$ , ak  $e$  je červená hrana.



Obr. 2.21: Grafické rozdelenie hrán rotačného binárneho snarku  $G_4$  do tried pomocou jedného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_3$

Hrany rotačného binárneho snarku  $G_4$  rozdeľujeme do štyroch tried na základe obrázku 2.21. Z farebnej vizualizácie tiež vyplývajú názvy týchto tried – *fialové*, *červené*, *modré* a *oranžové* hrany.

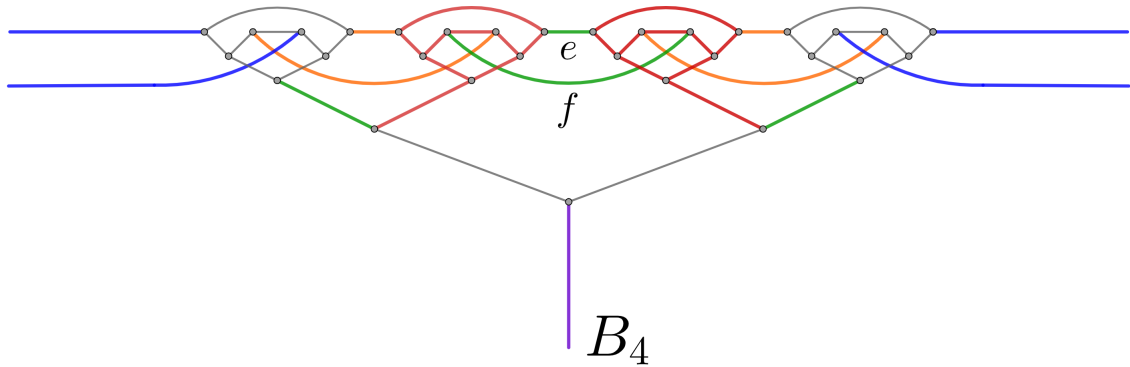
Hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_4, e)$  na rotačnom binárnom snarku  $G_4$  v závislosti od príslušnosti hrany  $e$  do niektorej zo štyroch tried je nasledovná:

- $\psi(G_4, e) = 63 = 3^2 \cdot 7$ , ak  $e$  je fialová hrana,
- $\psi(G_4, e) = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ , ak  $e$  je modrá hrana,
- $\psi(G_4, e) = 27 = 3^3$ , ak  $e$  je červená hrana,
- $\psi(G_4, e) = 72 = 2^3 \cdot 3^2$ , ak  $e$  je oranžová hrana.

Hrany rotačného binárneho snarku  $G_5$  rozdeľujeme do piatich tried na základe obrázku 2.22. Z farebnej vizualizácie tiež vyplývajú názvy týchto tried – *fialové*, *modré*, *zelené*, *červené* a *oranžové* hrany.

Zaujímavosťou je, že až na oranžové a zelené hrany je možné v tomto prípade hrany rotačného binárneho snarku rozdeliť do piatich tried na základe definície pre  $i \geq 6$ . Taktiež platí, že hodnoty Kászonyiho funkcie pre hrany z jednotlivých tried sú rovnaké, ako keď do vzťahov z Tvrdenia 2.4.1 dosadíme  $i = 5$ .

V skutočnosti toto nie je príliš prekvapivé, nakoľko pre samotné dôkazy hodnôt Kászonyiho funkcie pre fialové, modré, zelené a červené hrany stačí slabší predpoklad, aby  $i \geq 5$ .



Obr. 2.22: Grafické rozdelenie hrán rotačného binárneho snarku  $G_5$  do tried pomocou jedného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_4$

Neplatí to však pre všetky hrany. Pri dvoch hranách, ktoré sme na obrázku 2.22 pomenovali  $e$  a  $f$  by sme skôr napríklad intuitívne predpokladali, že budú patriť do triedy oranžových hrán. Toto je tiež hlavným dôvodom, prečo sme sa rozhodli poriadne urobiť rozdelenie hrán do piatich tried a dôkaz hodnôt Kászonyiho funkcie pre rotačné binárny snarky  $G_i$  až od hodnoty  $i \geq 6$ .

Zaujímavosťou tiež je, že hodnota Kászonyiho funkcie pre *červené* a *fialové* hrany pre  $i = 5$  je rovnaká.

Hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G_5, e)$  na rotačnom binárnom snarku  $G_5$  v závislosti od príslušnosti hrany  $e$  do niektorej z troch tried je nasledovná:

- $\psi(G_5, e) = 11664 = 2^4 \cdot 3^6$ , ak  $e$  je fialová hrana,
- $\psi(G_5, e) = 2592 = 2^5 \cdot 3^5$ , ak  $e$  je modrá hrana,
- $\psi(G_5, e) = 15552 = 2^6 \cdot 3^5$ , ak  $e$  je zelená hrana,
- $\psi(G_5, e) = 11664 = 2^4 \cdot 3^6$ , ak  $e$  je červená hrana,
- $\psi(G_5, e) = 773 = 2^5 \cdot 3^4$ , ak  $e$  je oranžová hrana.



## Kapitola 3

# Maximálny počet farbení na 4-regulárnych grafoch

Pri skúmaní hranových farbení je pomerne prirodzené si položiť nasledovnú otázku: „V závislosti od počtu vrcholov  $n$ , na ktorom (ktorých) grafe sa nadobúda maximálny počet hranových  $k$ -farbení?“ Zrejme najväčší zmysel dáva si túto otázku položiť pre  $k$ -regulárne grafy – či už pre všeobecné  $k$  alebo si ho zafixovať na nejakú konkrétnu konštantu. My sme rozhodli pre druhý prístup. V tejto kapitole skúmame maximálne počty hranových 4-farbení na jednoduchých 4-regulárnych grafoch v závislosti od počtu vrcholov na grafe.

Nech  $\text{MAX}_c(n)$  je funkcia, ktorá určuje maximálny počet hranových 4-farbení na jednoduchých 4-regulárnych grafoch v závislosti od počtu vrcholov  $n$ . Výsledkom nášho skúmania je nekonečná trieda 4-regulárnych grafov, ktorá slúži ako doteraz najlepší známy dolný odhad hodnoty funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ . Súčasťou výsledkov je aj dôkaz počtu hranových 4-farbení ľubovoľného z grafov tejto nekonečnej triedy.

Inšpiráciou pre náš výskum bol článok *Enumerating the edge-colourings and total colourings of a regular graph* od autorov S. Bessy a F. Havet [1]. V tomto článku autori uvádzajú, že každý  $k$ -regulárny súvislý graf na  $n$  vrchoch má nanaajvyš  $k \cdot ((k-1)!)^{n/2}$  rôznych hranových  $k$ -farbení. Autori pri tomto odhade pripúšťajú aj násobné hrany, čo je v kontraste s naším výskumom.

V článku sa tiež venujú odhadom na jednoduchých kubických grafoch. Vo svojom článku dokazujú, že každý jednoduchý súvislý kubický graf na  $n$  vrchoch má nanaajvyš  $\frac{9}{4} \cdot 2^{n/2}$  hranových 3-farbení, pričom sa domnievajú, že tento odhad nie je tesný, ale sa dá ešte zlepšiť. Ďalej autori pre dve nekonečné triedy jednoduchých kubických grafov, takzvané *rebríky* a *prekrútené rebríky* určujú počty hranových 3-farbení a vyslovujú hypotézu, že zjednotením týchto dvoch tried získame množinu grafov, na ktorých sa nadobúda maximálny počet hranových 3-farbení v závislosti od počtu vrcholov  $n$ . Presnejšie, ak  $n/2$  je párne, tak maximum sa nadobúda na prekrútenom rebríku na  $n$

vrcholoch, ktorý má  $2^{n/2} + 8$  hranových 3-farbení, a ak  $n/2$  je nepárne, tak maximum sa nadobúda na rebríku na  $n$  vrcholoch, ktorý má  $2^{n/2} + 4$  rôznych hranových 3-farbení. Detaily konštrukcie týchto dvoch pomerne známych nekonečných tried kubických grafov je možné nájsť v samotnom článku.

Náš výskum vychádza aj z počítačom podporovaného prehľadávania 4-regulárnych grafov. Podarilo sa nám pomocou #SAT solvera určiť počty hranových 4-farbení na všetkých jednoduchých 4-regulárnych grafoch do 12 vrcholov a počty hranových 4-farbení na všetkých jednoduchých 4-regulárnych grafoch *bez trojuholníkov*<sup>1</sup> do 18 vrcholov. Nami skonštruovaná nekonečná trieda grafov, ktorá je dolným funkcie  $\text{MAX}_c(n)$  je zovšeobecnením pozorovaní, ktoré vyplynuli z týchto výsledkov.

Pri počte hranových farbení sa držíme zaužívanej konvencie, ktorá bola použitá aj v článku, ktorý spomíname ako inšpiráciu pre náš výskum. Preto, keď budeme niekde v rámci tejto kapitoly uvažovať nejaký počet hranových  $k$ -farbení, tak máme na mysli všetky možné hranové  $k$ -farbenia, teda aj tie, ktoré vieme získať permutáciou farieb (nedelíme výsledný počet hranových farbení číslom  $k!$ ).

### 3.1 Počítačom podporované skúmanie 4-regulárnych grafov

Súčasťou nášho výskumu je aj postupné prehľadávanie všetkých 4-regulárnych grafov do 12 vrcholov a všetkých 4-regulárnych grafov bez trojuholníkov do 18 vrcholov. Cieľom prehľadávania bolo v úvode pomocou výpočtovej techniky určiť počty hranových 4-farbení pre každý z týchto grafov a následne vybrať spomedzi nich tie, na ktorých sa dosahujú maximálne počty hranových 4-farbení.

Počas tejto fázy výskumu sme vzali do úvahy dva rôzne algoritmy na počítanie hranových 4-farbení: #SAT solver a naivný backtrack. Na základe testovania rýchlosti výpočtov na menšej testovacej podmnožine grafov sa ukázalo, že rýchlejší bol #SAT solver, ktorý si v tejto podkapitole aj v krátkosti popíšeme. Rovnako sa budeme venovať one-to-one konverzii medzi problémom hranového  $k$ -farbenia na  $k$ -regulárnych grafoch a problému hľadania všetkých ohodnotení literálov, pre ktoré je splnená konkrétna SAT formula. Predtým si ale v krátkosti popíšeme algoritmus založený na naivnom backtraku.

Naivný backtrack je jedným zo základných algoritmov na počítanie hranových farbení na grafoch. Jeho myšlienka je založená na postupnom vetvení programu na základe toho, akou farbou sa rozhodneme zafarbiť ďalšiu pridávanú hranu a následnom vyčíslení počtu všetkých vetiev, ktoré skončia úspešným hranovým farbením. Tento algoritmus sa v našom prípade ukázal pomalší ako dostupné SAT solvery. Tie často

<sup>1</sup>Hovoríme, že graf  $G$  obsahuje trojuholník, ak nejaký jeho podgraf je kružnicou dĺžky 3.

v sebe majú zabudované mnohé heuristiky na usekávajúce tých vetiev výpočtu, ktoré už nemôžu viesť k správne výsledku. Podobné heuristiky je samozrejme možné implementovať aj pre naivný backtrack. Nakoniec sme sa z praktických dôvodov rozhodli si vybrať niektorý z už existujúcich SAT solverov.

Pre potreby našej práce sme sa rozhodli využiť open-source #SAT solver sharpSAT s MIT licenciou od autorov Marcthurley a Vladrich<sup>2</sup>.

### 3.1.1 #SAT solver a konverzia problému hranového farbenia na problém SAT

Na rozdiel od bežného SAT solvera, ktorý hľadá odpoveď na otázku, či existuje také ohodnotenie literálov, pri ktorom je výsledná formula splniteľná, úlohou #SAT solvera je určiť počet rôznych ohodnotení literálov, pre ktoré je výsledná formula splniteľná. #SAT solver pri tom nemusí nutne vedieť určiť hodnoty jednotlivých literálov pre úspešné ohodnotenia formuly. Tento rozdiel medzi bežným SAT solverom a #SAT solverom nám umožní efektívne vypočítať počet rôznych hranových  $k$ -farbení na  $k$ -regulárnych grafoch, ako si aj hneď ukážeme. Pre zaujímavosť, bežný SAT solver sa zase zvykne v teórii grafov využívať na zisťovanie, či je daný graf hranovo  $k$ -zafarbiteľný.

Teraz popíšeme, ako problém hranovej  $k$ -zafarbiteľnosti na  $k$ -regulárnych grafoch prevedieme na problém #SAT a to konštrukciou formuly  $F$  v konjunktívnom normálnom tvare. Súčasťou konverzie je tiež dôkaz, že ide o one-to-one konverziu. Inak povedané existuje presne  $\lambda$  rôznych ohodnotení literálov takých, že nami skonštruovaná formula  $F$  je splniteľná práve vtedy, keď graf  $G$ , ku ktorému prislúcha táto formula má  $\lambda$  hranových  $k$ -farbení. O zistenie hodnoty  $\lambda$  sa následne postará samotný #SAT solver.

Pre každú hranu  $x$  grafu  $G$  zavedieme  $k$  boolovských premenné  $x_1, \dots, x_k$ , pričom každá premenná reprezentuje jednu z farieb  $\{1, \dots, k\}$ , ktorými môžeme hranu  $x$  zafarbiť. Formula  $F$  potom obsahuje nasledovné, a žiadne iné, klauzuly:

- Množinu klauzúl  $K_1$ , ktoré vyjadrujú, že každá hrana je zafarbená aspoň jednou farbou. Teda pre každú hranu  $x \in E(G)$  vytvoríme klauzulu  $K_x = (x_1 \vee \dots \vee x_k)$ .
- Množinu klauzúl  $K_2$ , ktorých cieľom je spoločne vyjadriť, že pre každý vrchol  $v$  a pre ľubovoľnú farbu  $i \in \{1, \dots, k\}$  je nanaajvyš jedna z hrán incidentných s vrcholom  $v$  zafarbená farbou  $i$ .

Vzhľadom na to, že vieme, že graf  $G$  je  $k$ -regulárny, môžeme si hrany incidentné

<sup>2</sup><https://github.com/marcthurley/sharpSAT>.

s vrcholov  $v$  označiť v nejakom poradí ako  $e^1(v), \dots, e^k(v)$ . K ľubovoľnej hrane  $e^j(v)$  potom prislúchajú literály  $x_1^j, \dots, x_k^j$ .

Klauzuly pre vrchol  $v$  a ľubovoľnú farbu  $1 \leq i \leq k$  potom vyzerajú nasledovne:

$$\bigwedge_{1 \leq j, q \leq k, j \neq q} (\neg x_i^j \vee \neg x_i^q)$$

Teraz dokážeme, že ide o one-to-one redukciu. Najprv ukážeme, že ak existuje nejaké konkrétne priradenie  $c$  farieb hranám  $c : e \in E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , ktoré je  $k$ -farbením grafu  $G$ , tak potom k nemu existuje jedinečné<sup>3</sup> ohodnotenie literálov, pre ktoré je formula  $F$  splniteľná. Tým dokážeme, že ak existuje  $\lambda$  rôznych hranových  $k$ -farbení na grafe  $G$ , tak potom formula  $F$  má presne  $\lambda$  ohodnotení literálov, pre ktoré je splniteľná. Následne dokážeme, že ku každému ohodnoteniu literálov formuly  $F$ , pre ktoré je formula splniteľná existuje jedinečné zafarbenie hrán grafu  $G$   $k$  farbami. V rámci celého dôkazu značíme hodnotou  $x_\xi = 0$  ako priradenie hodnoty *False* boolovskej premennej  $x_\xi$  a  $x_\xi = 1$  zase znamená priradenie hodnoty *True*.

Majme konkrétne priradenie farieb  $c$  pre hrany  $x \in E(G)$ , ktoré je  $k$ -farbením grafu  $G$ . Priradíme hodnoty literálom nasledovným spôsobom:  $x_i = 1$ , ak  $c(x) = i$  a v opačnom prípade  $x_i = 0$ .

Najprv ukážeme, že pri tomto ohodnotení je formula  $F$  splniteľná. Zrejme množina klauzúl  $K_1$  je splnená, nakoľko  $c$  priradí každej hrane farbu. Je tiež ľahké nahliadnuť, že aj množina klauzúl  $K_2$  je splnená, nakoľko  $c$  je hranovým farbením, a teda nám zaručuje, že pre ľubovoľné dve susedné hrany  $e$  a  $f$  hrany platí, že nie sú zafarbené rovnakou farbou, teda  $c(e) \neq c(f)$ .

Jedinečnosť priradenia hodnôt literálov v závislosti od farbenia  $c$  vyplýva z toho, ako sme ho definovali. Pre názornosť, ak by  $c_1$  a  $c_2$  boli dve rôzne  $k$ -farbenia, tak potom musí existovať hrana  $x$ , pre ktorú  $c_1(x) \neq c_2(x)$ , a teda by boli v oboch prípadoch rôzne ohodnotené literály  $x_i$  prislúchajúce k hrane  $x$ .

Teraz ukážeme, že ku každému takému ohodnoteniu boolovských premenných, že formula  $F$  je splniteľná existuje jedinečné  $k$ -farbenie  $c$  hrán grafu  $G$ .

Zobrazenie  $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  definujeme nasledovne:  $c(x) = i$ , ak boolovská premenná  $x_i$  má hodnotu  $x_i = 1$ . Ukážeme, že  $c$  je týmto spôsobom definované správne, teda ukážeme, že je jednoznačné, priraduje každej hrane  $x \in E(G)$  nejakú validnú hodnotu, a že spĺňa definíciu hranového  $k$ -farbenia. Na záver ukážeme, že takto definované zobrazenie  $c$  je jedinečné voči danému ohodnoteniu boolovských premenných.

<sup>3</sup>Ohodnotenie literálov priradíme len k tomuto konkrétnemu priradeniu farieb, a teda sa nám nestane, že by sme ho zarátali viackrát.



To, že priradenie  $c$  priraduje každej hrane  $x \in E(G)$  nejakú hodnotu vyplýva z toho, že klauzuly z množiny  $K_1$  sú splnené.

Sporom predpokladajme, že  $c$  nie je jednoznačné priradenie. To znamená, že existuje hrana  $x$  taká, že  $c(x) = i$  a súčasne  $c(x) = j$ , pričom  $i \neq j$ . Zoberme si vrchol  $v$  incidentný s hranou  $x$  a množinu s ním incidentných hrán  $E(v)$ . Nakoľko množina klauzúl  $K_1$  je splnená, vieme, že každá zo zvyšných hrán  $y \in E(v) - \{x\}$  má priradenú aspoň jednu z  $k$  farieb. Nakoľko hrane  $x$  sú priradené aspoň dve farby, môžeme z Dirichletovho princípu usúdiť, že existuje nejaká hrana  $y \in E(v) - \{x\}$  zafarbená rovnakou farbou ako  $x$ , bez ujmy na všeobecnosti nech je to farba  $i$ . Potom je ale nesplnená klauzula  $(\neg x_i \vee \neg y_i)$ , čo je v spore s tým, že formula  $F$  je splniteľná.

Ešte ukážeme, že zobrazenie  $c$  je skutočne farbením. Sporom, nech existujú dve susedné hrany  $x, y$  také, že  $c(x) = c(y) = i$ . Potom ale pre vrchol  $v$ , ktorý je s oboma týmito hranami incidentný nie je splnená klauzula  $(\neg x_i \vee \neg y_i)$ .

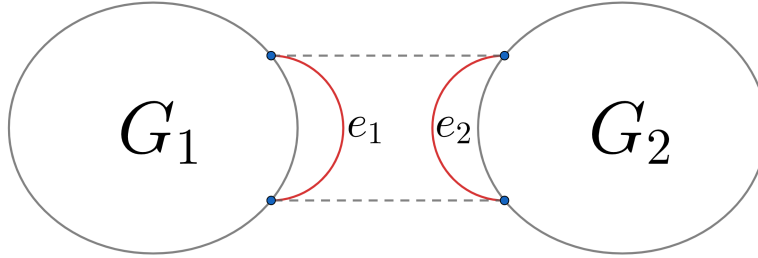
Jedinečnosť priradenia farbenia  $c$  na základe priradených hodnôt boolovských premenných sa dá ukázať obdobným spôsobom ako v opačnej implikácii. Uvedomme si, že sme už dokázali, že takto definované  $c$  je hranovým  $k$ -farbením. Ak by sme mali k dispozícii len toto farbenie vieme spätne jednoznačným spôsobom zrekonštruovať ohodnotenie literálov na základe predpisu, ako vzniká farbenie  $c$  z priradených hodnôt jednotlivým literálom.

## 3.2 Výsledky počítačového skúmania a ich zovšeobecnenie

Na úvod si zdefinujeme jednu operáciu na grafoch, takzvaný 2-join a popíšeme jej základnú vlastnosť ohľadne hranových  $k$ -farbení, keď ju aplikujeme na  $k$ -regulárne grafy. Táto operácia sa ukázala byť význačná, keď sme interpretovali výsledky skúmania grafov s maximálnym počtom hranových 4-farbení pre malý počet vrcholov.

Následne si ukážeme, ktoré grafy dosahujú maximálny počet hranových farbení na  $n \leq 18$  vrchoch a priblížime si ich štruktúru. Tiež si popíšeme konštrukciu nekonečnej triedy 4-regulárnych grafov, ktorú sme sa rozhodli na základe počítačom podporovaného prehľadávania malých grafov použiť ako dolný odhad funkcie maximálneho počtu hranových 4-farbení  $\text{MAX}_c(n)$ . Na záver pomocou myšlienok založených na dynamickom programovaní odargumentujeme, prečo sme sa na základe našich výsledkov rozhodli práve pre túto triedu grafov. Predpokladáme, že nami skonštruovaná trieda pravdepodobne nie je najlepším možným dolným odhadom funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ , aj keď nám poskytuje netriviálny odhad tejto funkcie. V čase písania diplomovej práce nám tiež nebolo známe, že by existoval lepší dolný odhad funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ .

Nech  $G_1$  a  $G_2$  sú dva ľubovoľné grafy. Potom hovoríme, že graf  $G = G_1 * G_2$ , ktorý vznikol tak, že si zoberieme ľubovoľné dve hrany  $e_1 = u_1v_1 \in E(G_1)$  a  $e_2 = u_2v_2 \in E(G_2)$ , odoberieme ich z grafov  $G_1$  a  $G_2$  a následne spojíme vrcholy  $u_1, u_2$  a  $v_1, v_2$  dvoma novými hranami, vznikol ako 2-join grafov  $G$  a  $F$  (pozri obrázok 3.1).



Obr. 3.1: Vizualizácia 2-joinu grafov  $G_1$  a  $G_2$

Pozrime sa teraz na súvis medzi hranovými  $k$ -farbeniami na  $k$ -regulárnych grafoch a 2-joinom grafov pre  $k \geq 3$ . Ukážeme si, že ak máme dva  $k$ -regulárne grafy  $G_1$  a  $G_2$ , pričom graf  $G$  má  $f_1$  rôznych hranových  $k$ -farbení a graf  $G_2$  má  $f_2$  rôznych hranových  $k$ -farbení, potom graf  $G_1 * G_2$  má  $(f_1 \cdot f_2)/k$  hranových  $k$ -farbení.

**Lema 3.2.1.** *Nech pre  $k \geq 3$  sú  $G_1$  a  $G_2$  dva  $k$ -regulárne grafy. Ďalej nech graf  $G_1$  má  $f_1$  hranových  $k$ -farbení a graf  $G_2$  má  $f_2$  hranových  $k$ -farbení. Potom graf  $G = G_1 * G_2$ , ktorý vznikne ako 2-join grafov  $G_1$  a  $G_2$  má  $(f_1 \cdot f_2)/k$  hranových  $k$ -farbení.*

*Dôkaz.* Uvažujeme značenie vrcholov a hrán z definície 2-joinu. Označme si dve novovzniknuté hrany, ktoré vznikli spojením vrcholov  $u_1, u_2$  a  $v_1, v_2$  ako  $e'_1$  a  $e'_2$ . Je ľahké nahliadnuť, že pre každé farbenie  $c_1$  grafu  $G_1$  a farbenie  $c_2$  grafu  $G_2$  také, že  $c_2(e_2) = c_1(e_1)$  existuje prislúchajúce farbenie grafu  $G = G_1 * G_2$ . Preto graf  $G$  má aspoň  $(f_1 \cdot f_2)/k$ .

Sporom predpokladajme, že existuje hranové  $k$ -farbenie  $c$  grafu  $G$  také, že  $c(e'_1) \neq c(e'_2)$ . Pozrime sa na podgraf  $G_1$ , ktorý má  $n = |V(G_1)|$  vrcholov. V riadnom hranovom  $k$ -farbení musí do každého vrcholu vchádzať každá z  $k$  farieb práve raz. Dokopy teda bude do  $n$  vrcholov vchádzať po  $n$  z každej farby. Dôkaz teraz rozdelíme na dva prípady, podľa parity počtu vrcholov  $n$ . Ak je  $n$  nepárne, tak potom nie je možné dofarbiť podgraf  $G_1$ , nakoľko vyžadujeme, aby do nepárneho počtu vrcholov vchádzala nejaká tretia<sup>4</sup> farba iná ako  $c(e'_1)$  aj  $c(e'_2)$ . To nevieme docieľiť, lebo zafarbením ľubovoľnej hrany ľubovoľnou farbou zvýšime celkový počet vrcholov, do ktorých vchádza táto farba o dva. Ak je  $n$  párne, potom musí do  $n - 1$  vrcholov vchádzať hrana zafarbená farbou  $c(e'_1)$ , čo nevieme docieľiť a to z rovnakých dôvodov ako tomu bolo v predošlom prípade.  $\square$

<sup>4</sup>Predpokladáme, že  $k \geq 3$ . Predsa len, hranové 2-farbenia na 2-regulárnych grafoch nie sú zaujímavé.

### 3.2.1 Malé grafy s maximálnym počtom hranových farbení

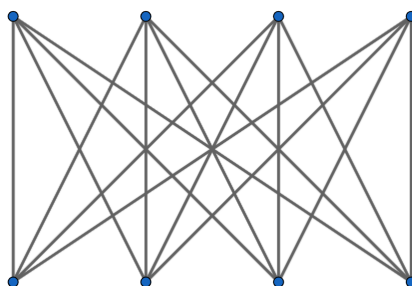
Teraz si popíšeme jednotlivé 4-regulárne grafy na  $6 \leq n \leq 18$  vrcholoch, ktoré nám v rámci skúmania maximálnych hranových 4-farbení pomocou #SAT solvera vyšli ako tie, na ktorých sa dosahuje hodnota funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ .

Na úvod je dobré si uvedomiť, že všetky jednoduché súvislé 4-regulárne grafy na nepárnom počte vrcholov majú nula hranových 4-farbení. Stačí si uvedomiť, že pre ľubovoľnú farbu  $a$  musí do každého vrcholu vchádzať jedna hrana zafarbená farbou  $a$ . Teda dokopy do všetkých vrcholov pri nepárnom  $n$  musí vchádzať nepárny počet hrán zafarbených farbou  $a$ , čo je v spore s tým, že zafarbením ľubovoľnej hrany farbou  $a$  zvýšime počet vrcholov, do ktorých vchádza hrana zafarbená farbou  $a$  o dva. Preto sa budeme zaoberať farbeniami len tých 4-regulárnych grafov, ktoré majú páry počet vrcholov.

Na  $n = 2$  a  $n = 4$  vrcholoch neexistuje jednoduchý súvislý 4-regulárny graf.

Pre  $n = 6$  je 4-regulárnym grafom, na ktorom sa nadobúda maximálny počet hranových 4-farbení graf  $K_6 - M$ , ktorý vznikne tak, že z kompletného grafu na šiestich vrcholoch odoberieme perfektné párenie  $M$ . Tento graf má 48 rôznych hranových 4-farbení.

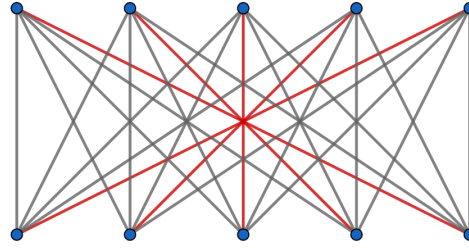
Grafom na ôsmich vrcholoch s maximálnym počtom hranových 4-farbení je kompletný bipartitný graf  $K_{4,4}$ . Tento graf má 576 rôznych hranových 4-farbení (pozri obrázok 3.2).



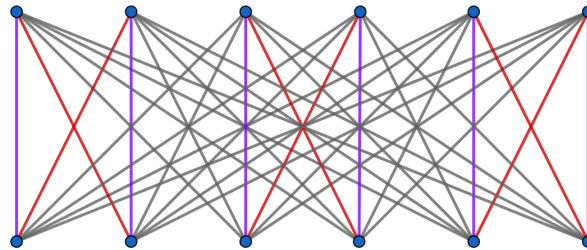
Obr. 3.2: Kompletný bipartitný graf na ôsmich vrcholoch  $K_{4,4}$

Pre  $n = 10$  je grafom, na ktorom sa nadobúda maximálny počet hranových farbení graf  $K_{5,5} - M$ , ktorý vznikne tak, že z kompletného bipartitného grafu na 10 vrcholoch odoberieme perfektné párenie  $M$ . Tento graf má 1344 rôznych hranových 4-farbení (pozri obrázok 3.3).

*Poznámka 3.2.2.* Perfektné párenie  $M$  na grafe  $K_{5,5}$ , ktoré z neho bolo odobrané, aby vznikol 4-regulárny graf  $K_{5,5} - M$  s maximálnym počtom hranových 4-farbení na 10 vrcholoch je na obrázku vyznačené červenou farbou.

Obr. 3.3: Kompletný bipartitný graf  $K_{5,5}$  bez párenia  $M$ 

Pre  $n = 12$  je grafom, na ktorom sa nadobúda maximálny počet hranových farbení graf  $K_{6,6} - 2M$ , ktorý vznikne tak, že z kompletného bipartitného grafu na 12 vrcholoch odoberieme dve disjunktné perfektné párenia  $M$  a  $M'$ . Tento graf má 5376 rôznych hranových 4-farbení (pozri obrázok 3.4).

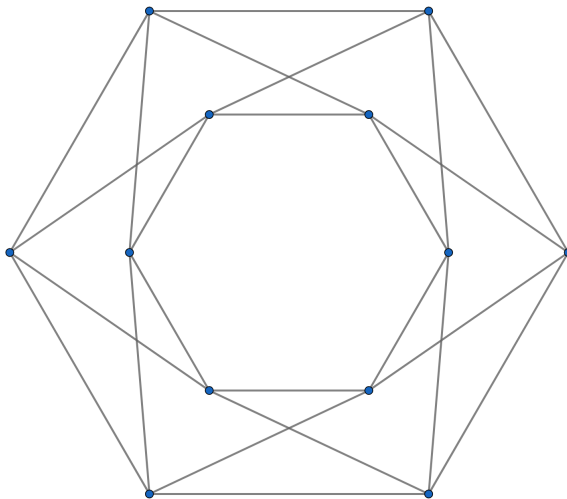
Obr. 3.4: Kompletný bipartitný graf  $K_{6,6}$  bez dvoch disjunktných párení  $M$  a  $M'$ 

*Poznámka 3.2.3.* Perfektné párenie  $M$  a  $M'$ , ktoré boli z grafu  $K_{6,6}$  odobrané sú vyznačené červenou a fialovou farbou.

Súčasne sa ale na tento graf môžeme pozrieť aj iným, pre nás zaujímavejším spôsobom. Zovšeobecnením tohto pohľadu potom vznikne nekonečná trieda 4-regulárnych grafov, ktoré nám poslúžia ako najlepší doteraz známy dolný odhad funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ . Môžeme si všimnúť, že graf  $K_{6,6} - 2M$  sa skladá z dvoch disjunktných kružníc dĺžky  $n/2 = 6$ , pričom vrcholy medzi kružnicami sú hranami poprepájané tak, ako je vyobrazené na obrázku 3.5.

Tento graf sme sa rozhodli nazvať *ciTadela* na 12 vrcholoch  $T_{12}$ , graficky nám pripomína pohľad z vtáčej perspektívy na vežu stredovekej citadely.

Všeobecne definujeme graf *citadelu* na  $n$  vrcholoch  $T_n$  nasledovne: Vezmime si dve disjunktné kružnice  $k_1 = (v_0^{(1)}, v_1^{(1)}, \dots, v_{n/2-1}^{(1)})$  a  $k_2 = (v_0^{(2)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{n/2-1}^{(2)})$  dĺžky  $n/2$ . Následne každý z vrcholov  $v_i^{(1)}$ ,  $0 \leq i < n/2$  spojíme hranou s vrcholmi  $v_{i-1}^{(2)}$  a  $v_{i+1}^{(2)}$  (mod  $n/2$ ). Potom výsledný graf nazývame citadelou na  $n$  vrcholoch  $T_n$ .

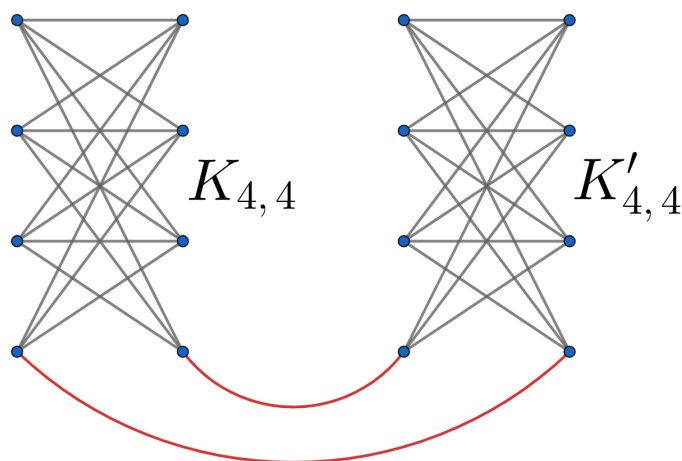


Obr. 3.5: Graf  $K_{6,6} - 2M$  je izomorfný s citadelou  $T_{12}$  na 12 vrcholoch

Skúmaniu počtu hranových 4-farbení na tejto nekonečnej triede grafov sa budeme bližšie venovať v nasledujúcej podkapitole. Teraz pokračujeme v opise grafov, na ktorých sa nadobúda hodnota funkcie  $\text{MAX}_c(n)$  do 18 vrcholov.

Grafom s maximálnym počtom farbení pre počet vrcholov  $n = 14$  je graf citadela  $T_{14}$ . Tento graf má 16128 rôznych hranových 4-farbení.

Pre  $n = 16$  je grafom, na ktorom sa nadobúda maximálny počet hranových farbení graf  $K_{4,4} * K_{4,4}$ , teda graf, ktorý vznikne ako 2-join dvoch kópií kompletného bipartitného grafu na ôsmich vrcholoch  $K_{4,4}$  (pozri obrázok 3.6). Tento graf má 82944 rôznych hranových farbení. Graf citadela na 16 vrcholoch  $T_{16}$  má 70656 rôznych hranových 4-farbení a je grafom s druhým najväčším počtom hranových 4-farbení na 16 vrcholoch.



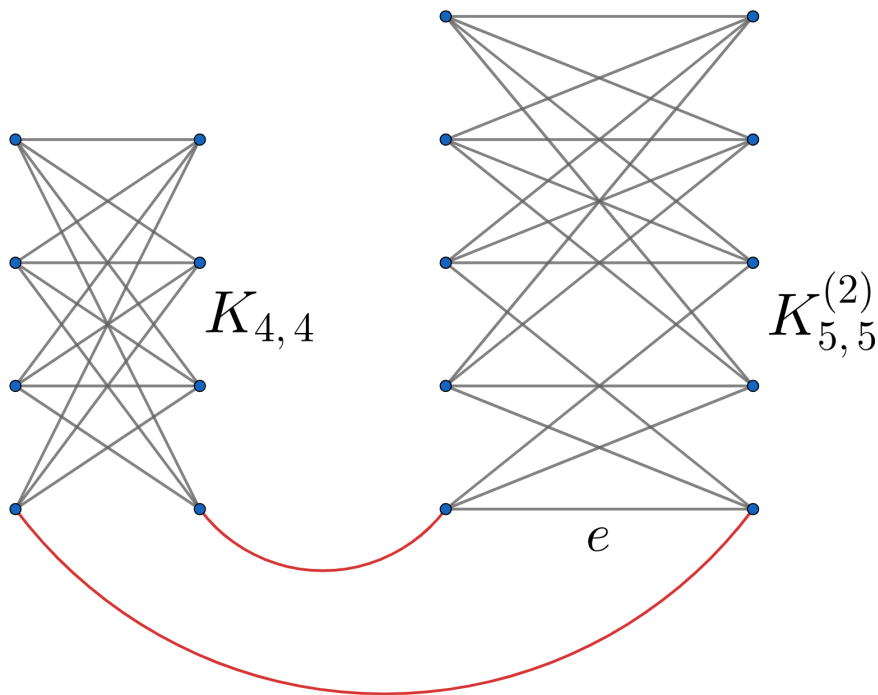
Obr. 3.6: Graf  $K_{4,4} * K_{4,4}$ , ktorý vznikol operáciou 2-join dvoch kópií grafu  $K_{4,4}$

*Poznámka 3.2.4.* Na obrázku 3.6 je možné vidieť graf, ktorý vznikol ako 2-join dvoch

kompletných bipartitných grafov na ôsmich vrcholoch označených ako  $K_{4,4}$  a  $K'_{4,4}$ . Hrany, ktoré vznikli operáciou 2-join sú na obrázku vizuálne zvýraznené červenou farbou.

Pre  $n = 18$  je grafom, na ktorom sa nadobúda maximálny počet hranových farbení taký graf  $G_{18} = K_{4,4} * B_{5,5}^{(2)}$ , ktorý vznikol ako 2-join kompletného bipartitného grafu na ôsmich vrcholoch  $K_{4,4}$  a bipartitným 4-regulárnym grafom na 10 vrcholoch, ktorý ale má dvojnásobnú hranu. Pracovne si tento bipartitný graf s dvojnásobnou hranou nazvime  $B_{5,5}^{(2)}$ . Vizualizáciu grafu je možné si pozrieť na obrázku 3.7. Pôvodne dvojnásobná hrana je na obrázku označená ako hrana  $e$ . Tento graf má 276480 rôznych hranových farbení.

Pre zaujímavosť, ako graf s druhým najväčším počtom hranových farbení na 18 vrcholoch je graf citadela  $T_{18}$  s počtom farbení 261120.



Obr. 3.7: Graf na 18 vrcholoch, na ktorom sa nadobúda maximálny počet farbení

Tento výsledok bol pre nás prekvapivý a poučný. Vďaka nemu sme si uvedomili, že jednoduchý graf na  $n$  vrcholoch môže vzniknúť aj 2-joinom dvoch grafov s násobnými hranami. Je tomu tak preto, že operácia 2-joinu odoberá jednu hranu na každom z grafov, ktoré vstupujú do operácie 2-joinu. Tým pádom pri  $m$  2-joinoch môžu mať pôvodné grafy dokopy až  $2m$  násobných hrán.

Využitím vzťahu o počte farbení pri 2-joine sa dá spätne zistiť, že bipartitný 4-regulárny graf s dvojnásobnou hranou  $B_{5,5}^{(2)}$  má 1920 rôznych hranových 4-farbení. Pre porovnanie hodnota funkcie  $\text{MAX}_c(10)$  je  $\text{MAX}_c(10) = 1334$ .

Ďalším zaujímavým dôsledkom toho, že graf  $K_{4,4} * B_{5,5}^{(2)}$  je grafom s maximálnym počtom hranových farbení je uvedomenie, že graf  $B_{5,5}^{(2)}$  je grafom s maximálnym počtom hranových 4-farbení na 4-regulárnych grafoch pre 10 vrcholov, ak pripustíme najviac jednu dvojnásobnú hranu. Analogicky môžeme tvrdiť, že graf  $K_{4,4}$  má maximálny počet hranových farbení spomedzi všetkých 4-regulárnych grafov na 8 vrchoch s najviac jednou dvojnásobnou hranou. Je tomu tak preto, že ak by existoval iný graf na 10 (8) vrchoch s jednou dvojnásobnou hranou, ktorý má väčší počet hranových 4-farbení, tak by graf s maximálnym počtom hranových 4-farbení na 18 vrcholov vznikol ako 2-join toho grafu, a teda by ním nebol graf  $K_{4,4} * B_{5,5}^{(2)}$ .

V tejto fáze výskumu pomocou výpočtovej techniky sme už narazili na časové limity. Je dobré si uvedomiť, že nielen počet rôznych 4-regulárnych grafov na  $n$  vrchoch je exponenciálne rastúci vzhľadom na  $n$ , ale aj problém hranového 4-farbenia je NP-úplný, a teda nie je známy polynomiálny algoritmus, ktorý by ho riešil. Z toho vyplýva, že časová zložitosť nášho problému narastá pomerne extrémnym spôsobom, ak sa rozhodneme problém riešiť prehľadávaním všetkých 4-regulárnych grafov a počítaním hranových 4-farbení pomocou #SAT solvera. Len pre zaujímavosť, dospieť k výsledkom na 18 vrchoch nám trvalo až dva týždne, pričom pre 16 vrcholov na tom istom zariadení to bola otázka hodín a pre menšie  $n$  išlo skôr o otázku minút, či dokonca sekúnd.

Pripúšťame, že využitím výpočtových kapacít externého výpočtového strediska by sme vedeli nájsť graf s maximálnym počtom hranových 4-farbení aj pre 20 vrcholov. Po doterajších zisteniach nám však prišlo otázne, či by to malo zásadný efekt na posun výskumu v tejto problematike. Rozhodli sme sa preto pre iný postup. Pomocou dynamického programovania, ktoré si popíšeme v nasledujúcej podkapitole sme sa rozhodli extrapolovať dáta z už zistených výsledkov s cieľom zistiť z toho, čo máme k dispozícii, akú najlepšiu nekonečnú triedu grafov vieme skonštruovať vzhľadom na počet hranových 4-farbení v závislosti od počtu vrcholov  $n$ .

Taktiež je možné, že pre ešte lepší dolný odhad funkcie  $MAX_c(n)$  by sa hodilo poznať, ktoré grafy majú maximálny počet hranových 4-farbení pre  $n \leq 18$ , keď pripustíme jednu alebo viaceré násobné hrany. Tu sme však narazili na problém, nepodarilo sa nám zohnať alebo vytvoriť generátor všetkých možných 4-regulárnych grafov s násobnými hranami. Faktom však ostáva, že aj keby sme tieto výsledky mali k dispozícii, stále by finálnym výsledkom nášho výskumu pravdepodobne nebol najlepší možný odhad funkcie  $MAX_c(n)$ , respektíve ak by sme ho aj našli, nevedeli by sme to o ňom prehlásiť. V súčasnosti totiž nemáme k dispozícii ani pomerne tesné horné odhady funkcie  $MAX_c(n)$ , čo nám komplikuje získať spätnú väzbu toho, ako dobrý je dolný odhad funkcie  $MAX_c(n)$  pomocou konkrétnej triedy grafov.

Na záver tejto podkapitoly ponúkame sumarizáciu výsledkov, ktoré sme získali po-

mocou počítačom podporovaného prehľadávania 4-regulárnych grafov do 18 vrcholov. Názvy grafov uvádzame schematicky, podľa toho ako sme ich označili v texte tejto podkapitoly.

Počet vrcholov $n$	Maximálny graf	Hodnota funkcie $\text{MAX}_c(n)$
6	$K_6 - M$	48
8	$K_{4,4}$	576
10	$K_{5,5} - M$	1344
12	$T_{12}$	5376
14	$T_{14}$	16128
16	$K_{4,4} * K_{4,4}$	82944
18	$K_{4,4} * B_{5,5}^{(2)}$	276480

### 3.2.2 Rozšírenie výsledkov pomocou dynamického programovania

V tejto podkapitole popíšeme, ako sme dospeli k záveru, že z dát a pozorovaní, ktoré máme k dispozícii najlepší dolný odhad funkcie  $\text{MAX}_c(n)$  ponúka práve nekonečná trieda grafov – citadiel.

Najprv prijmem zopár predpokladov, ktoré vychádzajú z našich pozorovaní z predošlej podkapitoly. Budeme predpokladať, že 4-regulárne grafy s maximálnym počtom hranových 4-farbení na  $n$  vrchoch pre  $6 \leq n \leq 18$  sú tie z predošlej podkapitoly. Pre pripomenutie: pre  $n \neq 10$  sú to grafy popísané v tabuľke 3.2.1 a pre  $n = 10$  je to graf  $B_{5,5}^{(2)}$ . Uvedomme si, že predpokladáme, že aj ak povolíme viacero násobných hrán, grafmi s maximálnym počtom hranových farbení ostanú tieto grafy, čo v skutočnosti nemusí byť pravda.

Pre  $12 \leq n \leq 18$  môžeme pozorovať že jednoduchým 4-regulárnym grafom s maximálnym počtom hranových 4-farbení je buď graf citadela  $T_n$  na  $n$  vrchoch, alebo graf, ktorý vznikol ako 2-join dvoch menších grafov, u ktorých sa dosahoval maximálny počet hranových 4-farbení. Preto našu ďalšiu hypotézu, z ktorej budeme vychádzať, formulujeme nasledovne: „pre  $n \geq 20$  je grafom s maximálnym počtom hranových farbení na  $n$  vrchoch buď graf citadela  $T_n$ , alebo graf, ktorý vznikol ako 2-join dvoch menších grafov, u ktorých sa dosahoval maximálny počet hranových farbení vzhľadom na počet vrcholov.“

Ak platí predošlá hypotéza a vyššie zmienený predpoklad o grafoch s maximálnym počtom hranových farbení na  $6 \leq n \leq 18$  vrchoch, potom je možné pomocou dynamického programovania v polynomiálnom čase (v závislosti od počtu vrcholov grafu) nájsť 4-regulárny graf s maximálnym počtom hranových farbení na  $n$  vrchoch. Vieme ho získať ako graf s maximálnym počtom hranových farbení grafov  $\max\{T_n, G_i * G_{n-i}; i < n\}$ , kde  $T_n$  je citadela na  $n$  vrchoch a  $G_i * G_{n-i}$ ,  $i < n$



značí všetky možné 2-joiny grafov s maximálnym počtom hranových farbení pre  $i < n$  takých, že výsledný graf má  $n$  vrcholov. Čitateľ zbehlý v programovaní si ľahko domyslí, ako by pomocou popisu argumentu napísal program založený na dynamickom programovaní, ktorý by postupne vypisoval 4-regulárne grafy s maximálnym počtom hranových farbení pre ľubovoľne veľký počet vrcholov  $n$ .

My sa však nebudeme zaoberať detailným opisom takéhoto programu, nakoľko o chvíľu vyslovíme a dokážeme tvrdenie, ktoré spraví tento program redundantným. V tvrdení dokážeme, že vyššie zmienený program pre  $n \geq 20$  na výstupe vypíše vždy graf – citadelu  $T_n$ .

Predtým ako prejdeme k samotnému dôkazu vyslovíme ešte bez dôkazu tvrdenie, ktoré nám určuje počet hranových 4-farbení pre grafy citadela  $T_n$ ,  $n \geq 12$ . Dôkazom tohto tvrdenia sa zaoberáme v nasledujúcej podkapitole, nakoľko ide o pomerne netriviálny dôkaz.

**Tvrdenie 3.2.5.** *Pre  $n \geq 12$  má 4-regulárny graf citadela  $T_n$  na  $n$  vrchoch nasledovný počet hranových 4-farbení:*

- $2^n + 2^{n/2+4} + 2^{n/2+2}$ , ak  $4 \mid n$  ( $n$  je deliteľné 4).
- $2^n - 2^{n/2+1}$ , ak  $4 \nmid n$ .

Teraz vyslovíme a dokážeme tvrdenie, ktoré nám hovorí o tom, že pri nami sformulovaných predpokladoch a hypotéze je pre  $n \geq 20$  4-regulárnym grafom s maximálnym počtom hranových 4-farbení graf citadela  $T_n$ .

**Tvrdenie 3.2.6.** *Predpokladajme, že 4-regulárnymi grafmi s maximálnym počtom hranových 4-farbení na  $n$  vrchoch pre  $6 \leq n \leq 18$ ,  $n \neq 10$  pri ľubovoľnom počte násobných hrán sú grafy z tabuľky 3.2.1 a pre  $n = 10$  je to graf  $B_{5,5}^{(2)}$  (pozri obrázok 3.7).*

*Ďalej predpokladajme, že 4-regulárny graf s maximálnym počtom hranových 4-farbení na  $n$  vrchoch pre  $n \geq 20$  získame ako  $\max\{T_n, G_i * G_{n-i}, i < n\}$ , teda ako maximum z 2-joinov menších grafov s maximálnym počtom hranových 4-farbení a grafu citadela  $T_n$ .*

*Potom 4-regulárnym grafom s maximálnym počtom hranových 4-farbení pre  $n \geq 20$  je graf citadela  $T_n$  na  $n$  vrchoch.*

*Dôkaz.* Pripomeňme si na úvod dôkazu Lemu 3.2.1, ktorá nám dáva do súvisu 2-join a počet hranových 4-farbení. Pre pripomenutie: ak 4-regulárne grafy  $G_1$  a  $G_2$  majú  $f_1$  a  $f_2$  rôznych hranových 4-farbení, tak graf  $G$ , ktorý vznikne ako 2-join grafov  $G_1 * G_2$  má  $(f_1 \cdot f_2)/4$  hranových 4-farbení.

Samotný dôkaz rozdelíme na niekoľko častí. Najprv dokážeme, že pre ľubovoľné  $n \geq 12$  má graf citadela  $T_n$  viac hranových farbení, ako graf, ktorý vznikne ako 2-join ľubovoľných dvoch citadiel  $T_i * T_{n-i}$  vhodnej veľkosti.

Nahliadnime, že pre  $n$  deliteľné štyrmi má graf  $T_n$  počet farbení niekde v intervale  $(2^n, 2^{n+1})$ . Pre  $n$ , ktoré nie je deliteľné štyrmi sa počet hranových farbení nachádza zase v otvorenom intervale  $(2^{n-1}, 2^n)$ . Za povšimnutie stojí, že toto platí až pre  $n \geq 12$ . Správnosť celkového dôkazu to nijak neovplyvní, lebo grafy s maximálnym počtom farbení na menej ako 12 vrcholoch sú tie z tabuľky 3.2.1 a graf  $B_{5,5}^{(2)}$ , pričom tieto grafy rozoberáme v dôkaze samostatne.

Zoberme si najprv  $n$  deliteľné štyrmi. Potom graf, ktorý vznikne ako 2-join grafov citadela  $T_i$  a  $T_{n-i}$  pre ľubovoľné prípustné  $i$  má nanajvyš  $(2^{i+1} \cdot 2^{n-i+1})/4 = 2^n$  hranových farbení. Súčasne ale vieme, že graf citadela  $T_n$  má viac ako  $2^n$  hranových 4-farbení, preto je lepším kandidátom na graf s maximálnym počtom hranových farbení na  $n$  vrcholoch.

Rozoberme ešte prípad kedy  $n$  nie je deliteľné štyrmi. Ak graf na  $n$  vrcholoch vznikne ako 2-join grafov  $T_i$  a  $T_{n-i}$  pre ľubovoľné prípustné  $i$ , tak potom jeden z grafov  $T_i$  a  $T_{n-i}$  nemá počet vrcholov deliteľný štyrmi. Bez ujmy na všeobecnosti nech  $i$  nie je deliteľné štyrmi. Potom výsledný graf  $T_i * T_{n-i}$  má nanajvyš  $(2^i \cdot 2^{n-i+1})/4 = 2^{n-1}$  rôznych hranových 4-farbení, čo je menej ako počet hranových farbení, ktoré má graf citadela  $T_n$ .

Teraz si ukážeme, že pre  $n \geq 34$  má graf citadela  $T_n$  vždy viacej hranových farbení ako ľubovoľný graf, ktorý vznikne ako 2-join niektorého z grafov s maximálnym počtom hranových farbení na  $x = \{6, 8, 10, 16, 18\}$  vrcholoch a grafu citadela  $T_{n-x}$ .

Je ľahké si uvedomiť, že ľubovoľný z grafov s maximálnym počtom farbení na 6, 8, 10, 16 a 18 vrcholoch má menej ako  $0.6 \cdot 2^{x+2}$  hranových 4-farbení, kde  $x$  je počet vrcholov grafu. Toto pozorovanie využijeme neskôr pri dôkaze.

Ďalej si uvedomme, že graf citadela  $T_n$  na  $n$  vrcholoch má aspoň  $2^n - 2^{n/2+1}$  (ak  $n$  nie je deliteľné štyrmi) hranových farbení a súčasne nie viac ako  $2^n + 2^{n/2+4} + 2^{n/2+2}$  (ak  $n$  je deliteľné štyrmi). Tento odhad farbení robíme preto, aby sme nemuseli rozoberať viacero možností v závislosti od toho, či niektorý z grafov citadela  $T_i$  má počet vrcholov deliteľný štyrmi.

Teraz spravíme porovnanie počtu farbení grafu citadela  $T_n$  a grafu, ktorý vznikol ako 2-join  $G_x * T_{n-x}$  niektorého z grafov s maximálnym počtom hranových farbení na  $x = \{6, 8, 10, 16, 18\}$  vrcholoch a grafu citadela  $T_{n-x}$ . Vieme, že graf  $G_x * T_{n-x}$  má nanajvyš  $0.6 \cdot 2^{x+2} \cdot (2^{n-x} + 2^{(n-x)/2+4} + 2^{(n-x)/2+2})/4 = 0.6 \cdot (2^n + 2^{n/2+x/2+4} + 2^{n/2+x/2+2})$  rôznych hranových 4-farbení. Nakoľko vieme, že  $x \leq 18$ , tak tento počet farbení nie je väčší ako  $0.6 \cdot (2^n + 2^{n/2+13} + 2^{n/2+11})$ . Ďalej vieme, že graf citadela  $T_n$  má aspoň  $2^n - 2^{n/2+1}$  hranových 4-farbení. Zvyšok dôkazu spočíva v niekoľkých aritmetických úpravách, na konci ktorých prideme na to, že pre  $n \geq 34$  je  $2^n - 2^{n/2+1}$  väčšie ako  $0.6 \cdot (2^n + 2^{n/2+13} + 2^{n/2+11})$ . Samotné úpravy je si pozrieť tu:

$$2^n - 2^{n/2+1} \stackrel{?}{>} 0.6 \cdot (2^n + 2^{n/2+13} + 2^{n/2+11})$$

$$0.4 \cdot 2^n \stackrel{?}{>} 2^{n/2+1} + 0.6 \cdot 2^{n/2+13} + 0.6 \cdot 2^{n/2+11}$$

$$0.4 \cdot 2^n > 2^{n-2} \stackrel{?}{>} 2^{n/2+14} > 2^{n/2+1} + 0.6 \cdot 2^{n/2+13} + 0.6 \cdot 2^{n/2+11}.$$

Je ľahké nahliadnuť, že pre  $n \geq 34$  platí  $2^{n-2} > 2^{n/2+14}$ , preto pre  $n \geq 34$  platí, že graf citadela  $T_n$  má viac hranových 4-farbení ako graf, ktorý vznikol ako 2-join  $G_x * T_{n-x}$  niektorého z grafov s maximálnym počtom hranových farbení na  $x = \{6, 8, 10, 16, 18\}$  vrcholoch a grafu citadela  $T_{n-x}$ .

Ostávajúci ale 30 prípadov, v ktorých je potrebné rozhodnúť, či pre  $n < 34$  má viacej farbení graf citadela  $T_n$  alebo 2-join niektorých dvoch grafov s maximálnym počtom farbení na  $x = \{6, 8, 10, 16, 18\}$  alebo 2-join jedného z týchto grafov a grafu citadela  $T_i$  vhodnej veľkosti sme rozobrali manuálne. Výsledkom tohto rozboru je záver, že aj pre  $20 \leq n \leq 32$  má graf citadela  $T_n$  najviac hranových farbení spomedzi prípustných grafov, ktoré v tejto vete uvažujeme.

□

### 3.3 Skúmanie počtu hranových farbení na triede grafov citadela

Cieľom tejto podkapitoly je dokázať Tvrdenie 3.2.5 o počte hranových 4-farbení pre grafy citadela  $T_n$  pre  $n \geq 12$ . Toto tvrdenie sme predtým bez dôkazu sformulovali v predošlej podkapitole.

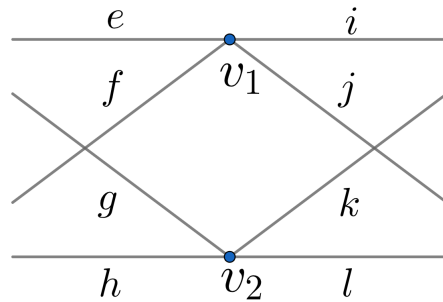
Pre pripomenutie: ideme dokázať tvrdenie, že graf citadela  $T_n$  má  $2^n + 2^{n/2+4} + 2^{n/2+2}$  rôznych hranových 4-farbení, ak je  $n$  deliteľné 4. Na druhej strane, ak  $n$  nie je deliteľné štyrmi, potom graf  $T_n$  má  $2^n - 2^{n/2+1}$  rôznych hranových 4-farbení.

Predtým ako prejdeme k samotnému dôkazu si zadefinujeme graf citadela  $T_n$  druhým spôsobom – ako graf, ktorý vznikne spojením niekoľkých (4, 4)-pólov. Táto definícia sa nám neskôr hodí v dôkaze, keď nebudeme určovať počet hranových 4-farbení grafu citadela  $T_n$  priamo, ale pomocou takzvaného *grafu prechodov*. Začneme definíciou (4, 4)-pólu  $T$ , ktorého postupným viacnásobným spájaním následne vznikne výsledný graf citadela  $T_n$ .

(4, 4)-pól  $T$  je multipól, ktorý vznikne tak, že zoberieme dva izolované vrcholy  $v_1, v_2$  a na každý z nich napojíme štyri visiace hrany. Vstupný konektor  $S_1$  obsahuje striedavo visiace hrany incidentné s vrcholom  $v_1$  a s vrcholom  $v_2$ , zatiaľ čo výstupný konektor  $S_2$  obsahuje najprv dve visiace hrany incidentné s vrcholom  $v_1$  a následne dve hrany incidentné s vrcholom  $v_2$ .

Toto poradie visiacych hrán na konektoroch (4, 4)-pólu  $T$  je dôležité, nakoľko sa od neho bude odvíjať tvar výsledného grafu, ktorý vznikne postupným spojením niekoľ-

kých  $(4, 4)$ -pólov  $T$ , Pre lepšiu predstavivosť, na obrázku 3.8 sú visiacie hrany začlenené do konektorov nasledovným spôsobom:  $S_1 = (e, g, f, h)$  a  $S_2 = (i, j, k, l)$ .



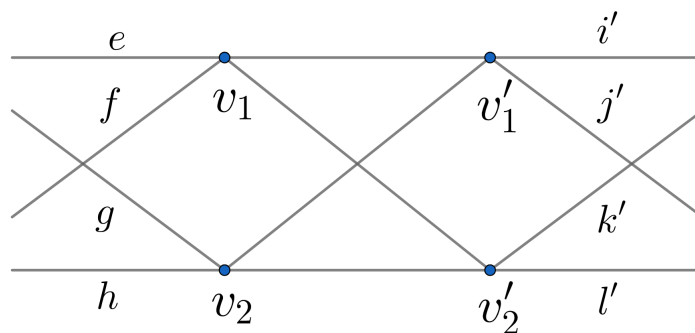
Obr. 3.8:  $(4, 4)$ -pól  $T$

Pripomeňme si, že pod spojením dvoch  $(k, k)$ -pólov  $M$  a  $N$  máme na mysli vznik nového  $(k, k)$ -pólu  $M \circ N$  tak, že zlúčime visiacie hrany na výstupnom konektore  $S_2$   $(k, k)$ -pólu  $M$  s visiacimi hranami na vstupnom konektore  $S_1$   $(k, k)$ -pólu  $N$  v poradí, v akom visiacie hrany vystupujú v konektoroch.

Odporúčame pozrieť si obrázok 3.9, ktorý zobrazuje spojenie dvoch  $(4, 4)$ -pólov  $T$ .

Ďalej si pripomeňme, že pod uzáverom  $(k, k)$ -pólu  $M$  máme na mysli graf  $G$ , ktorý vznikne tak, že spojíme visiacie hrany na vstupnom konektore s visiacimi hranami na výstupnom konektore  $(k, k)$ -pólu  $M$  v poradí, v akom vystupujú v jednotlivých konektoroch.

Pre detailné definície týchto dvoch pojmov pozri definíciu 1.2 v kapitole Úvod do problematiky Kászonyiho funkcie.



Obr. 3.9: Názorná ukážka spojenia dvoch  $(4, 4)$ -pólov  $T$

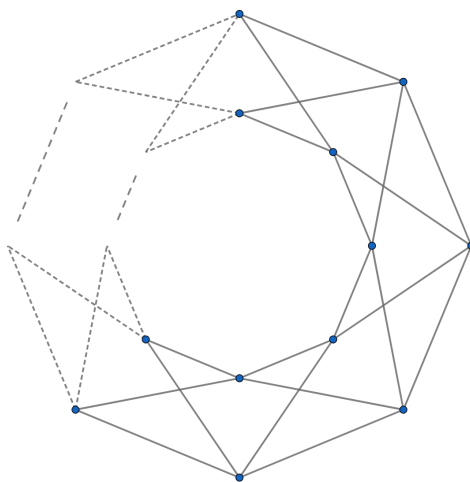
Graf citadela  $T_n$  potom môžeme definovať aj ako graf, ktorý vznikne ako uzáver  $(4, 4)$ -pólu  $T^{n/2}$ , ktorý zase vznikol postupným spojením  $n/2$   $(4, 4)$ -pólov  $T$ .

Takáto definícia grafu citadely  $T_n$  nám umožní na samotnom grafe definovať takzvanú *prechodovú reláciu* a *graf prechodov*, ktoré si teraz zdefinujeme.

**Definícia 3.3.1** (Prechodová relácia). Binárnu reláciu  $R$  na množine usporiadaných štvorie farieb takú, že  $xRy$  práve vtedy, keď existuje hranové 4-farbenie  $c$   $(k, k)$ -pólu  $M$ ,

ktoré priradí vstupnému konektoru  $S_1$  a výstupnému konektoru  $S_2$  zafarbenia  $c(S_1) = x$  a  $c(S_2) = y$  nazývame prechodová relácia.

**Definícia 3.3.2** (Graf prechodu). Grafom prechodu na  $(k, k)$ -póle  $M$  máme na mysli orientovaný graf  $G = (V, E)$ , pričom množinou vrcholov  $V$  myslíme všetky možné zafarbenia vstupného konektoru  $(k, k)$ -pólu  $M$ . Z vrcholu  $x$  vedie orientovaná hrana do vrcholu  $y$  grafu  $G$  práve vtedy, keď existuje hranové 4-zafarbenie  $c$   $(k, k)$ -pólu  $M$  také, že zafarbí konektory nasledovne:  $c(S_1) = x$  a  $c(S_2) = y$ . Formálne nech  $R$  je prechodová relácia na množine zafarbení konektorov  $(k, k)$ -pólu  $M$ , potom množina vrcholov  $V = \{(c_1, c_2, \dots, c_k) \mid c_i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$  a množina hrán  $E = \{xy \mid xRy; x, y \in V\}$ .



Obr. 3.10: Konštrukcia citadely  $T_n$  postupným spájaním  $(4, 4)$ -pólov  $T$

Pre lepšie pochopenie štruktúry dôkazu si najprv prejdeme hlavné myšlienky dôkazu počtu hranových 4-farbení na grafe citadele  $T_n$ .

Najprv sa pozrieme na možné hranové 4-farbenia  $(4, 4)$ -pólu  $T$  a skonštruujeme graf prechodu  $G$  na tomto  $(4, 4)$ -póle. Následne nahliadneme, že počet hranových farbení grafu citadely  $T_{2n}$  sa dá pretransformovať na úlohu hľadania všetkých sledov dĺžky  $n$  na grafe prechodov  $G$ , ktoré začínajú a končia v rovnakom vrchole. Na záver si uvedomíme, že existuje súvis medzi počtom sledov dĺžky  $n$  na grafe  $G$  a hodnotami matice  $\text{Adj}(G)^n$  (matice susednosti grafu  $G$  umocnenej na  $n$ -tú). Z tejto matice následne vyčítame počet rôznych hranových 4-farbení grafu citadela  $T_{2n}$ .

Samotný dôkaz začneme rozborom možných hranových 4-farbení  $(4, 4)$ -pólu  $T$  a následnou konštrukciou grafu prechodu  $G$  na  $(4, 4)$ -póle  $T$ .

V rozbere farbení budeme používať farby  $a, b, c, d$ . Pri rozbere nebudeme rozoberať farbenia, ktoré je možné získať permutáciou farieb. Vstupný konektor  $S_1$   $(4, 4)$ -pólu  $T$  potom môže byť zafarbený týmito štyrmi možnosťami. Pre jednotlivé možnosti rovno vymenúvame aj možné zafarbenia výstupného konektora  $S_2$ :

- Vstupný konektor  $S_1$  je zafarbený farbami  $c(S_1) = (a, b, b, a)$ . Potom môže byť výstupný konektor  $S_2$  zafarbený buď farbami  $c(S_2) = (c, d, d, c)$ , alebo  $c(S_2) = (d, c, c, d)$ .
- Vstupný konektor  $S_1$  je zafarbený farbami  $c(S_1) = (a, b, c, a)$ . V tomto prípade dostávame nasledovné možné zafarbenia výstupného konektora  $S_2$ :  $c(S_2) = (b, d, d, c)$  alebo  $c(S_2) = (d, b, c, d)$ .
- Vstupný konektor  $S_1$  je zafarbený farbami  $c(S_1) = (a, b, b, c)$ . Potom môže byť výstupný konektor  $S_2$  zafarbený buď farbami  $c(S_2) = (c, d, d, a)$ , alebo  $c(S_2) = (d, c, a, d)$ .
- Vstupný konektor  $S_1$  je zafarbený farbami  $c(S_1) = (a, b, c, d)$ . Pri tejto poslednej možnosti môže byť výstupný konektor  $S_2$  zafarbený nasledovnými štyrmi možnosťami:  $c(S_2) = (b, d, c, a)$ ,  $c(S_2) = (d, b, c, a)$ ,  $c(S_2) = (b, d, a, c)$  alebo  $c(S_2) = (d, b, a, c)$ .

Z predošlej analýzy je následne možné (vzatím do úvahy aj permutácií jednotlivých farieb) skonštruovať graf prechodu  $G$  na  $(4, 4)$ -póle  $T$ . Uvedomme si, že vrcholmi tohto grafu sú usporiadané štvorice farieb  $a, b, c, d$  označujúce zafarbenie vstupného konektora  $S_1$   $(4, 4)$ -pólu  $T$  a medzi vrcholmi  $v_1$  a  $v_2$  existuje orientovaná hrana  $v_1 \rightarrow v_2$  práve vtedy, keď existuje zafarbenie  $(4, 4)$ -pólu  $T$  také, že vstupný konektor má zafarbenie  $v_1$  a výstupný konektor zafarbenie  $v_2$ . V grafe prechodu  $G$  pre lepšiu prehľadnosť používame aj neorientované hrany. Ak medzi vrcholmi  $v_1$  a  $v_2$  existujú orientované hrany  $v_1 \rightarrow v_2$  a  $v_2 \rightarrow v_1$ , tak ich nahrádzame neorientovanou hranou  $v_1 v_2$ .

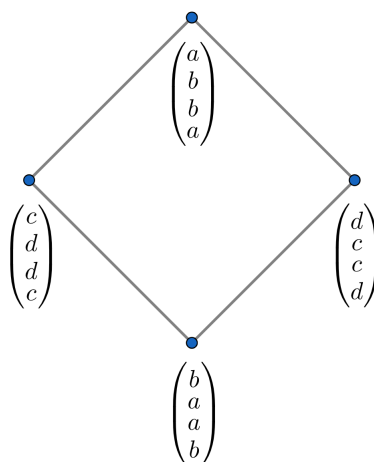
Graf prechodu  $G$  na  $(4, 4)$ -póle  $T$  sa skladá z desiatich komponentov. Pre lepšie pochopenie tohto grafu si neformálne rozdelíme jednotlivé komponenty do troch tried.

Prvú triedu tvoria tri neorientované kružnice dĺžky 4. Jeden takýto komponent spolu s názvami jednotlivých vrcholov je možné si pozrieť na obrázku 3.11. Zvyšné dva komponenty je možné získať vhodnou permutáciou farieb, ktorými sú značené jednotlivé vrcholy.

Matica susednosti  $\text{Adj}(C_4)$  kružnice  $C_4$  dĺžky 4 vyzerá nasledovne:

$$\text{Adj}(C_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Druhú triedu tvorí šesť izomorfných komponentov  $G_8$ , každý z nich má osem vrcholov. Na definovanie týchto komponentov nám tiež stačí zdefinovať jeden z nich. Ostatné je možné z neho získať vhodnou permutáciou farieb, pomocou ktorých definujeme jednotlivé vrcholy. Jeden z týchto komponentov je možné si pozrieť na obrázku

Obr. 3.11: Jeden z komponentov  $C_4$  grafu prechodov na  $(4, 4)$ -póle  $T$ 

3.12. Tento obrázok súčasne slúži aj ako definícia samotného grafu  $G_8$ . Na obrázku sú vyznačené aj názvy jednotlivých vrcholov. Graf  $G_8$  obsahuje orientované aj neorientované hrany. Orientáciu orientovaných hrán symbolizujeme na obrázku „šípkou.“

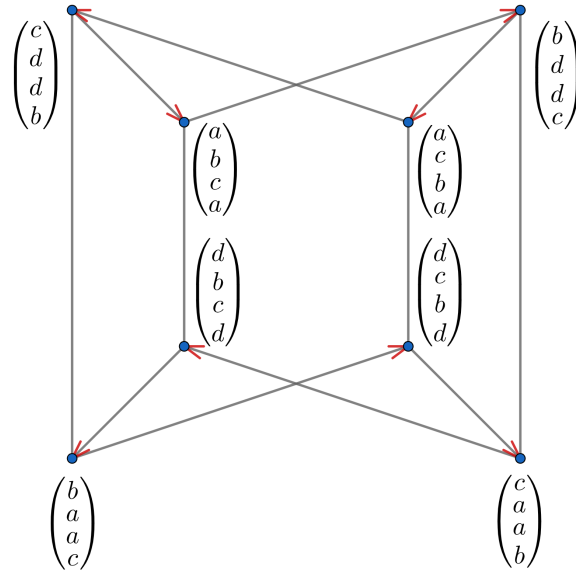
Matica susednosti  $\text{Adj}(G_8)$  grafu  $G_8$  vyzerá nasledovne:

$$\text{Adj}(G_8) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poslednú triedu tvorí jeden komponent  $G_{24}$  na ostávajúcich 24 vrchoch. Všetky vrcholy tohto komponentu sú typu  $v = (a, b, c, d)$  pre ľubovoľné rôzne farby  $a, b, c, d$ . Teda jeho vrcholmi sú všetky možné zafarbenia vstupného konektora  $S_1$  také, že každá z visiacych hrán je zafarbená inou farbou. Z každého z vrcholov tohto grafu vychádzajú štyri orientované hrany a súčasne do neho zo štyroch iných vrcholov vchádzajú štyri iné orientované hrany.

Mimo tohto pozorovania je však graf  $G_{24}$  pomerne veľký a má komplikovanú štruktúru, preto sme sa ho rozhodli zdefinovať len pomocou matice susednosti, čo je súčasne postačujúca definícia pre naše potreby.

V prípade, že by si chcel čitateľ overiť správnosť tohto grafu, odporúčame mu sa pozrieť dôkladne na analýzu farbení  $(4, 4)$ -pólu  $T$ , kedy je vstupný konektor  $S_1$  je zafarbený farbami  $c(S_1) = (a, b, c, d)$ , nakoľko všetky vrcholy v tomto komponente sú farbeniami práve tohto typu.



Obr. 3.12: Jeden z komponentov  $G_8$  grafu prechodov na  $(4, 4)$ -póle  $T$

Matica prechodu  $\text{Adj}(G_{24})$  na grafe  $G_{24}$  vyzerá nasledovne:

$$\text{Adj}(G_{24}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Môžeme si uvedomiť, že konkrétny prechod po grafe prechodu  $G$  na  $(4, 4)$ -póle  $T$  úzko súvisí s konkrétnym farbením niektorého z grafov citadela. Presnejšie povedané, každý sled dĺžky  $n$ , ktorý začína a končí v tom istom vrchole na grafe prechodu  $G$



predstavuje jedno konkrétne hranové 4-farbenie na grafe citadela  $T_{2n}$  na  $2n$  vrcholoch. Preto ak vieme spočítať počet rôznych sledov dĺžky  $n$  na grafe prechodu  $G$  takých, že začínajú v ľubovoľnom vrchole a súčasne v ňom aj končia, tak poznáme aj počet rôznych hranových 4-farbení na grafe citadela  $T_{2n}$  na  $2n$  vrcholoch.

Nech  $\text{Adj}(G)$  je *matica susednosti* grafu prechodu  $G$  na  $(4, 4)$ -póle  $T$ . Môžeme nahliadnuť, že hodnota  $x_{ij}$  v matici  $\text{Adj}(G)^n$  nám reprezentuje počet rôznych sledov dĺžky  $n$ , ktoré začínajú vo vrchole  $v_i$  a končia vo vrchole  $v_j$ . Preto ak poznáme hodnoty na diagonále matice  $\text{Adj}(G)^n$ , vieme ľahko určiť počet rôznych hranových 4-farbení na grafe citadela  $T_{2n}$  – získame ich ako súčet všetkých prvkov na diagonále matice  $\text{Adj}(G)^n$ .

Vzhľadom na to, že graf prechodu  $G$  obsahuje niekoľko komponentov, môžeme si úlohu nájdenia všetkých sledov na grafe  $G$  dĺžky  $n$  rozdeliť na podúlohy. Najprv vyriešime túto úlohu zvlášť pre každý komponent, a potom výsledný počet sledov získame ako súčet sledov cez všetky komponenty.

Pripomeňme si, že graf prechodu  $G$  na  $(4, 4)$ -póle  $T$  obsahuje 10 komponentov: tri kružnice  $C_4$  (pozri obrázok 3.11), šesť grafov  $G_8$  (pozri obrázok 3.12) a jeden komponent  $G_{24}$  (pozri maticu susednosti 3.3).

Pre graf  $C_4$  je ľahkým cvičením pomocou matematickej indukcie a definície súčinnu dvoch matíc dokázať, že pre ľubovoľné  $n \geq 1$  je graf  $\text{Adj}(C_4)^n$  nasledovného tvaru:

$$\text{Adj}(C_4)^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \end{pmatrix} & \text{inak.} \end{cases}$$

Teraz sa pozrieme na  $n$ -tú mocninu matice susednosti grafu  $G_8$  pre  $n \geq 2$ . Tvrdíme,

že pre  $n \geq 2$  je matica  $\text{Adj}(G_8)^n$  nasledovného tvaru:

$$\text{Adj}(G_8)^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} \\ 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 \\ 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix} & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 \\ 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} \\ 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 \end{pmatrix} & \text{inak.} \end{cases}$$

Dôkaz je opäť možné urobiť pomocou matematickej indukcie. Je triviálne overiť, že matice  $\text{Adj}(G_8)^2$  a  $\text{Adj}(G_8)^3$  reprezentujúce bázu matematickej indukcie sú požadovaného tvaru. Následne je najjednoduchšie samostatne pre párne  $n$  a pre nepárne  $n$  ukázať, že ak matica  $\text{Adj}(G_8)^{n-1}$  je predpokladaného tvaru, tak potom aj matica  $\text{Adj}(G_8)^n = \text{Adj}(G_8)^{n-1} \cdot \text{Adj}(G_8)$  má vyššie zmienený tvar.

Na záver sa ešte pozrieme ako vyzerá  $n$ -tá mocnina matice susednosti grafu  $G_{24}$  pre  $n \geq 2$ . Pre lepšiu prehľadnosť hodnôt matice  $\text{Adj}(G_{24})^n$  si zavedieme dve pomocné funkcie  $f_n$  a  $g_n$ , ktoré definujeme nasledovným spôsobom:

$$f_n = \begin{cases} 2^{n-2} \cdot (2^n + 2)/6 & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ 2^{n-2} \cdot (2^n - 2)/6 & \text{inak.} \end{cases}$$

$$g_n = \begin{cases} 2^{n-2} \cdot (2^n - 4)/6 & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ 2^{n-2} \cdot (2^n + 4)/6 & \text{inak.} \end{cases}$$

Potom využitím funkcií  $f_n$  a  $g_n$  pre  $n \geq 2$  vyzerá samotná  $n$ -tá mocnina matice

$\text{Adj}(G_{28})^n$  nasledovne:

$$\begin{pmatrix} f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n \\ f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n \\ g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n \\ f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n \\ g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n \\ f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n \\ f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n \\ g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n \\ f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n \\ f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n \\ g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n \\ f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n \\ g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n \\ f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n \\ g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n \\ f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n \\ f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & g_n & g_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & f_n & g_n & g_n & f_n & f_n \end{pmatrix}$$

Dôkaz, že matica  $\text{Adj}(G_{24})^n$  je skutočne vyššie zmieneného tvaru je tiež možné urobiť pomocou matematickej indukcie.

Pre bázu  $n = 2, 3$  je ľahké overiť, že matice sú požadovaného tvaru.

Následne pri samotnom dôkaze využívajúceho indukčný predpoklad je dobré si uvedomiť, že každý stĺpec matice  $\text{Adj}(G_{24})$  obsahuje práve štyri hodnoty 1 a zvyšné hodnoty sú nulové.

Nahliadnime, že pre ľubovoľnú dvojicu indexov  $i, j$  takú, že hodnota prvku matice  $\text{Adj}(G_{24})^n[i, j] = g_n$  platí, že všetky štyri ne-nulové hodnoty  $j$ -teho stĺpca matice  $\text{Adj}(G_{24})$  sa vynásobia s hodnotou  $f_{n-1}$  u matice  $\text{Adj}(G_{24})^{n-1}$ . Na druhej strane ak je dvojica indexov  $i, j$  taká, že hodnota prvku matice  $\text{Adj}(G_{24})^n[i, j] = f_n$ , potom platí, že niektoré dve nenulové hodnoty  $j$ -teho stĺpca matice  $\text{Adj}(G_{24})$  sa vynásobia s hodnotou  $f_{n-1}$  a zvyšné dve nenulové hodnoty tohto stĺpca sa vynásobia s hodnotou  $g_{n-1}$ .

Toto overovanie sa môže zdať pomerne prácne, ale v skutočnosti sa dá pomerne zautomatizovať v momente, ako si uvedomíme, že matica  $\text{Adj}(G_{24})^{n-1}$  ako hodnoty svojich riadkov obsahuje len štyri rôzne vektory. Stĺpce matice susednosti  $\text{Adj}(G_{24})$  tiež nemajú príliš veľkú variabilitu, opakuje sa tam len šesť rôznych stĺpcových vektorov.

Na záver ešte ostáva ukázať, že pre párne aj nepárne  $n$  platí  $f_n = 2 \cdot f_{n-1} + 2 \cdot g_{n-1}$

a  $g_n = 4 \cdot f_{n-1}$ . V našej práci to ukážeme len pre párne  $n$ . Pre nepárne  $n$  je dané rovnosti možné dokázať analogickým spôsobom. Pristúpme teraz k vyjadreniu vzťahov pre párne  $n$ :

$$2 \cdot f_{n-1} + 2 \cdot g_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-3} \cdot (2^{n-1} - 2)/6 + 2 \cdot 2^{n-3} \cdot (2^{n-1} + 4)/6 = 2^{n-2} \cdot (2^n + 2)/6 = f_n$$

$$4 \cdot f_{n-1} = 4 \cdot 2^{n-3} \cdot (2^{n-1} - 2)/6 = 2^{n-2} \cdot (2^n - 4)/6 = g_n.$$

Keď poznáme hodnoty ľubovoľnej mocniny matice susednosti pre každý z komponentov grafu prechodu  $G$  na  $(4, 4)$ -póle  $T$  je ľahké určiť počet rôznych sledov dĺžky  $n$  končiacich v rovnakom vrchole, v akom začínajú, a teda aj počet farbení grafu citadela  $T_{2n}$  na  $2n$  vrcholoch. Označme si túto hodnotu ako  $|c_4(T_{2n})|$ .

Pripomeňme si, že graf prechodu  $G$  na  $(4, 4)$ -póle  $T$  obsahuje 10 komponentov: tri kružnice  $C_4$ , šesť grafov  $G_8$  a jeden komponent  $G_{24}$ .

Ďalej si uvedomme, že pre konkrétne  $n$  a konkrétny z týchto troch grafov má  $n$ -tá mocnina matice susednosti na celej diagonále rovnaké hodnoty.

Preto výsledný počet sledov  $|c_4(T_{2n})|$  získame ako:

$$|c_4(T_{2n})| = 3 \cdot |V(G_4)| \cdot x_{i,i}^n + 6 \cdot |V(G_8)| \cdot y_{i,i}^n + 1 \cdot |V(G_{24})| \cdot z_{i,i}^n,$$

kde čísla 3, 6 a 1 reprezentujú počet jednotlivých komponentov,  $|V(G)|$  je počet vrcholov grafu  $G$  a hodnoty  $x_{i,i}^n$ ,  $y_{i,i}^n$  a  $z_{i,i}^n$  reprezentujú (v tomto poradí) hodnoty na diagonále matíc  $\text{Adj}(C_4)^n$ ,  $\text{Adj}(G_8)^n$  a  $\text{Adj}(G_{24})^n$ .

Pre párne  $n$  dostávame hodnoty:  $x_{i,i}^n = 2^{n-1}$ ,  $y_{i,i}^n = 2^{n-2}$  a  $z_{i,i}^n = 2^{n-2} \cdot (2^n + 2)/6$ . Výsledný počet rôznych hranových farbení grafu  $T_{2n}$  pre párne  $n$  má potom hodnotu:

$$|c_4(T_{2n})| = 3 \cdot 4 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot 8 \cdot 2^{n-2} + 24 \cdot 2^{n-2} \cdot (2^n + 2)/6 = 2^{2n} + 2^{n+4} + 2^{n+2}.$$

Preto pre párne  $n$  má graf citadela  $T_{2n}$   $2^{2n} + 2^{n+4} + 2^{n+2}$  rôznych hranových 4-farbení. Odtiaľ dostávame, že pre  $n$  deliteľné štyrmi má graf citadela  $T_n$   $2^n + 2^{n/2+4} + 2^{n/2+2}$  rôznych hranových 4-farbení.

Pre nepárne  $n$  dostávame hodnoty:  $x_{i,i}^n = y_{i,i}^n = 0$  a  $z_{i,i}^n = f_n = 2^{n-2} \cdot (2^n - 2)/6$ . Výsledný počet rôznych hranových farbení grafu  $T_{2n}$  pre nepárne  $n$  získame ako:

$$|c_4(T_{2n})| = 24 \cdot 2^{n-2} \cdot (2^n - 2)/6 = 2^{2n} - 2^{n+1}.$$

Odtiaľ už ľahko dopočítame, že pre  $n$ , ktoré nie je deliteľné štyrmi má graf citadela  $T_n$   $2^n - 2^{n/2+1}$  rôznych hranových 4-farbení, čím sme dokázali tvrdenie o počte hranových farbení pre grafy citadela  $T_n$  pre ľubovoľné  $n \geq 12$ .

# Záver

V našej práci sme sa venovali hranovým farbeniam, oblasti, ktorá je úzko spätá s hlbokými a známymi hypotézami z teórie grafov. V prvej časti sme pokračovali vo výskume Kászonyiho funkcie  $\psi(G, e)$  a v druhej sme skúmali maximálny počet hranových 4-farbení na 4-regulárnych grafov.

Určili sme hodnotu Kászonyiho funkcie  $\psi(G, e)$  pre ľubovoľnú hranu  $e$  každého grafu  $G$  z nekonečnej triedy rotačných binárnych snarkov, čím sme završili náš štvorročný výskum v tejto oblasti. Ako možné pokračovanie skúmania Kászonyiho funkcie sa ponúka napríklad rozšírenie Tvrdenia 1.1.5 autoriek A. Cappon a E. Walther na množinu všetkých prvočísel, objavenie nových vlastností Kászonyiho funkcie alebo nájdenie ďalšej nekonečnej snarkov, na ktorej Kászonyiho funkcia vytvára zaujímavé vzory.

Tiež sme skúmali maximálne počty hranových 4-farbení na jednoduchých 4-regulárnych grafov v závislosti od počtu vrcholov. Ako  $\text{MAX}_c(n)$  sme definovali funkciu, ktorá určuje maximálny počet hranových 4-farbení na jednoduchých 4-regulárnych grafoch v závislosti od počtu vrcholov  $n$ . Výsledkom nášho výskumu v tejto oblasti je nekonečná trieda 4-regulárnych grafov, ktorá ponúka kvalitný netriviálny dolný odhad funkcie  $\text{MAX}_c(n)$ . Súčasťou našej práce je aj dôkaz počtu hranových 4-farbení pre každý graf z tejto nekonečnej triedy grafov. V tejto oblasti sa ponúka niekoľko možných smerovaní výskumu, pričom ich spoločným cieľom by malo byť určenie maximálneho počtu hranových  $k$ -farbení (jednoduchých) súvislých  $k$ -regulárnych grafov v závislosti od  $k$  a od počtu vrcholov  $n$ .



# Literatúra

- [1] Stéphane Bessy and Frederic Havet. Enumerating the edge-colourings and total colourings of a regular graph. *Journal of Combinatorial Optimization*, 25, 05 2013.
- [2] D. Blanuša. Problem cetiriju boja. *Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II*, 1:31–42, 1946.
- [3] Richard C. Bradley. Snarks from a Kászonyi perspective: A survey. *Discret. Appl. Math.*, 189:8–29, 2015.
- [4] Ariana Cappon and Emily Walther. Prime factorization of Kászonyi numbers. *Research Experience for Undergraduates Research Reports*, pages 60–89, 2013.
- [5] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 5 edition, 2017.
- [6] Rufus Isaacs. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable. *The American Mathematical Monthly*, 82:221–239, 1975.
- [7] L. Kászonyi. On the nonplanarity of some cubic graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 15:123–131, 1972.
- [8] L. Kászonyi. On the structure of coloring graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 16:25–36, 1973.
- [9] Edita Máčajová and Martin Škoviera. Superposition of snarks revisited. *European Journal of Combinatorics*, 91:103220, 2021. Colorings and structural graph theory in context (a tribute to Xuding Zhu).
- [10] John J. Watkins. Snarks. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 576(1):606–622, 1989.
- [11] Matúš Zubčák. Potláčania hrán v kubických grafoch. Bachelor’s thesis, Univerzita Komenského v Bratislave, 2022.