

# Hranové farbenia regulárnych grafov

Bc. Matúš Zubčák,  
doc. RNDr. Edita Máčajová, PhD.

# Obsah diplomovej práce

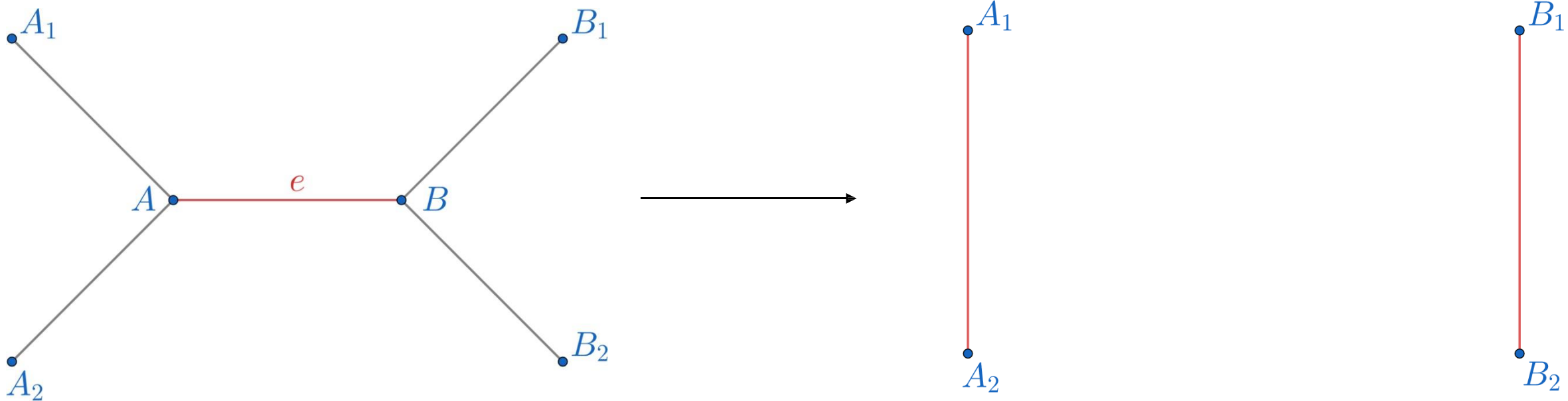
- Čiastočne nadväzujeme na výskum v bakalárskej práci
  - Rozšírime program na výpočet Kászonyiho funkcie
  - Určíme hodnoty Kászonyiho funkcie pre rotačné binárne snarky
- Nadväzujeme na článok *Enumerating the edge-colourings and total colourings of a regular graph* (S. Bessy, F. Havet)
  - Skúmame maximálne počty hranových 4-farbení na 4-regulárnych grafoch v závislosti od počtu vrcholov
  - Skonstruujeme nekonečnú triedu 4-regulárnych grafov, ktorá je dolným odhadom počtu hranových 4-farbení

# Úvod do problematiky

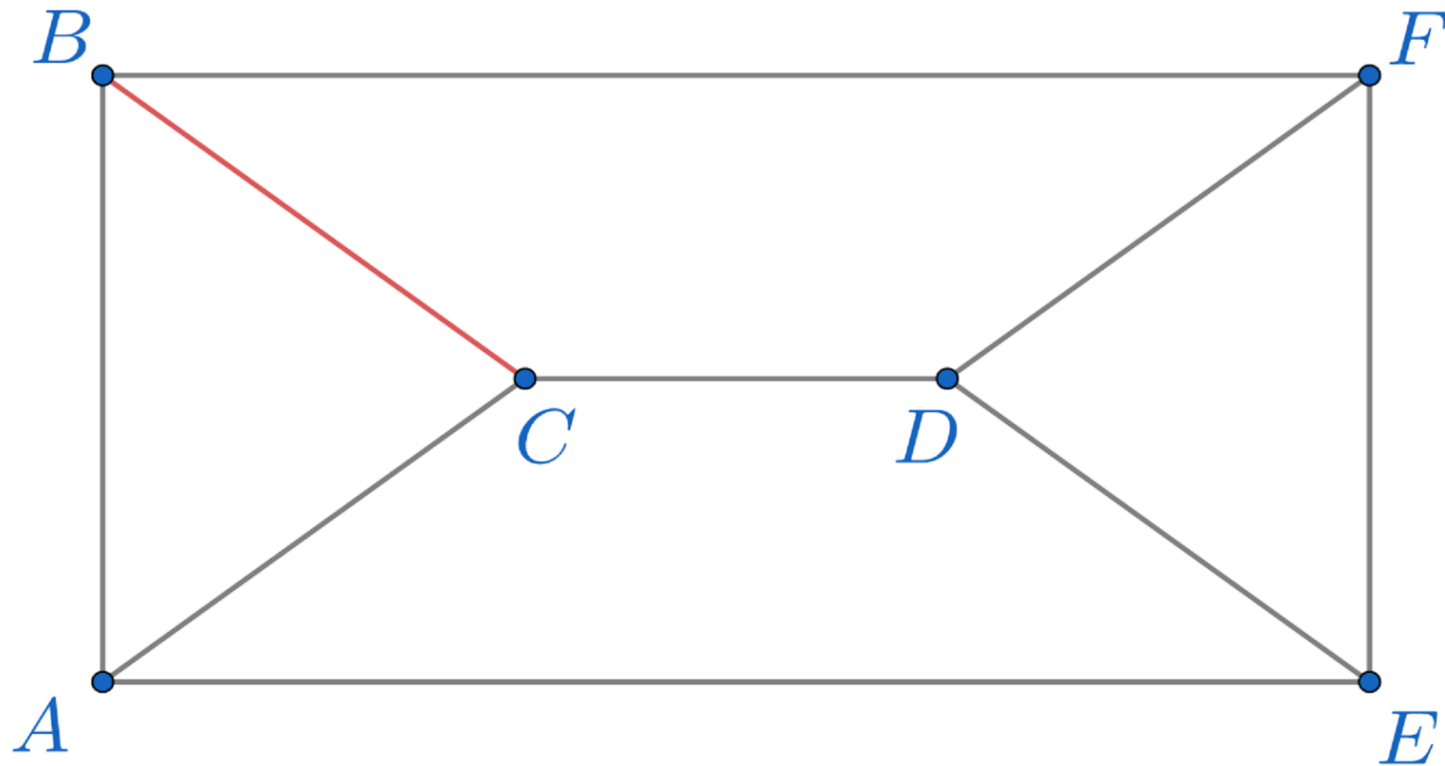
- Mnohé otvorené hypotézy z teórie grafov je možné zredukovať na kubické grafy
- Hypotézy sú otvorené pre hranovo 3-nezafarbiteľné kubické grafy
- Hľadajú sa vhodné miery „nezafarbiteľnosti“ kubického grafu, na základe ktorých by sme vedeli rozdeliť kubické grafy do tried
- Kászonyiho funkcia, ktorú v našej práci skúmame, úzko súvisí s hranovou nezafarbiteľnosťou kubických grafov

# Potlačenie hrany $e$ v kubickom grafe

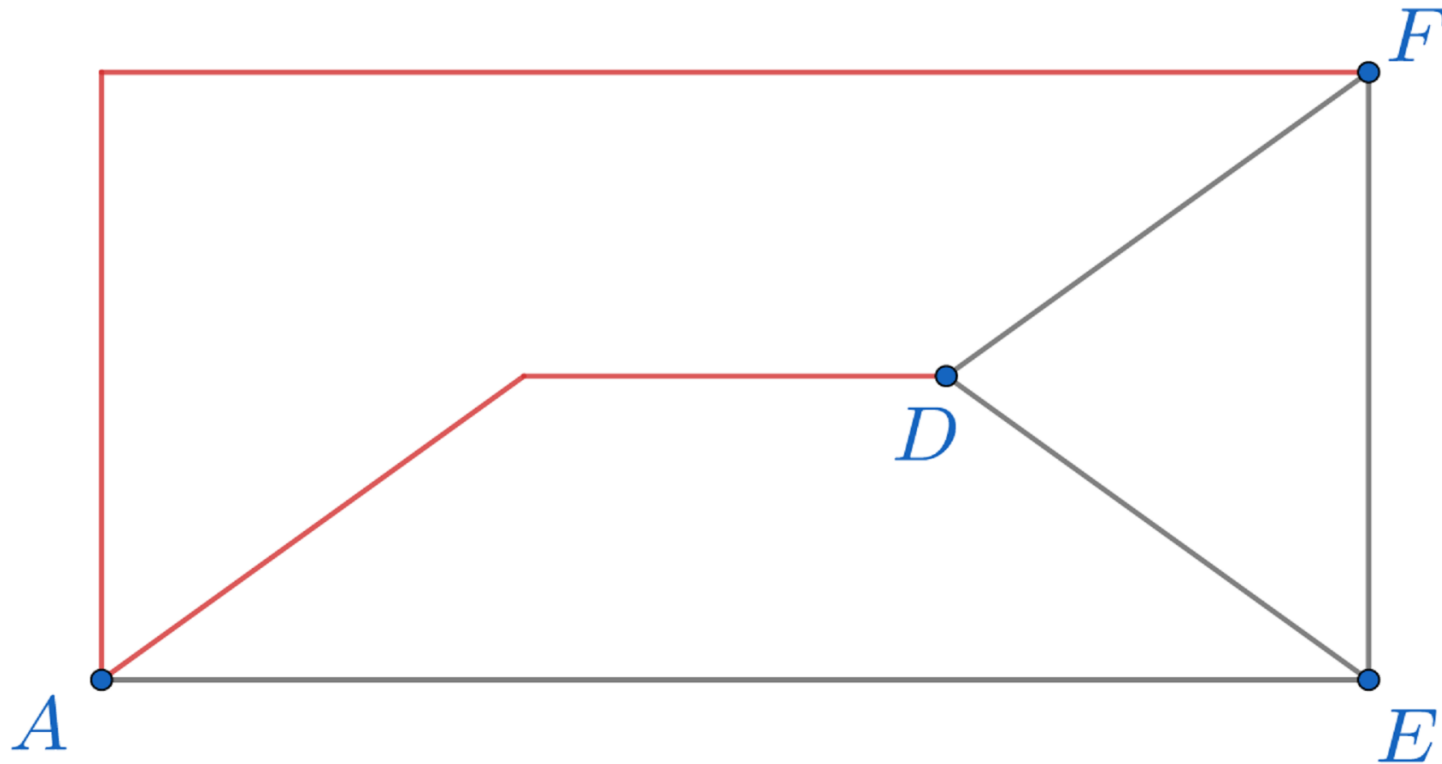
- Potlačenie hrany  $e$  v kubickom grafe je odobratie hrany  $e$  a následné vyhladenie vrcholov stupňa 2



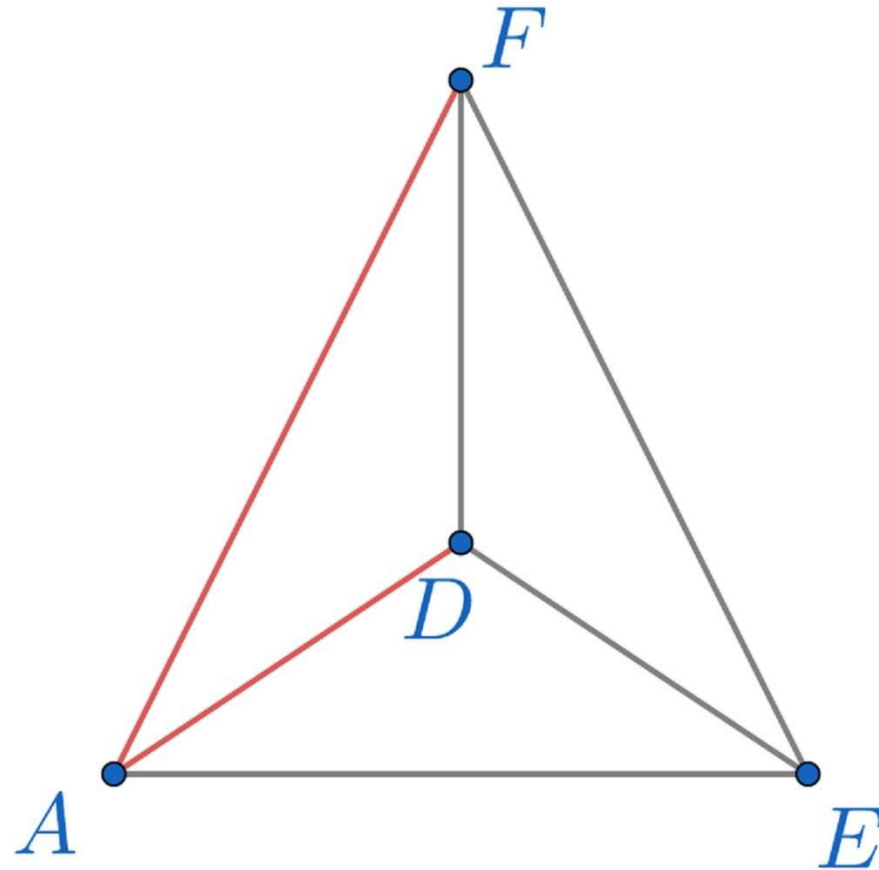
# Príklad hranového potlačenia – graf prizma



# Príklad hranového potlačenia – po potlačení



# Príklad hranového potlačenia – výsledný graf



# Kászonyiho funkcia – výsledky L. Kászonyiho

- Kászonyiho funkcia  $\psi(G, e)$  vyjadruje počet rôznych hranových 3-farbení grafu  $G$  po potlačení hrany  $e$
- (Kászonyi 1973) „*Nech  $H$  je súvislý podgraf snarku  $G$ , ktorý vznikol ako zjednotenie niekoľkých 5-cyklov. Potom hodnota Kászonyiho funkcie  $\psi(G, e)$  je pre všetky hrany  $e \in E(H)$  rovnaká.*“



# Kászonyiho funkcia – Cappon & Walther

- Nech  $P$  je množina nasledovných prvočísel:  $P = P_1 \cup P_2$  pričom  
 $P_1 = \{p \in N_{149} \mid p \text{ je prvočíslo}\},$   
 $P_2 = \{173, 179, 181, 197, 229, 257, 271, 359\}$

- (Cappon, Walther) „Pre každé prirodzené číslo  $n$  tvaru

$$n = \prod_{p \in P} p^k, k \in N$$

*existuje snark  $G$  a hrana  $e \in E(G)$  taká, že Kászonyiho funkcia  $\psi(G, e)$  pre danú dvojicu  $(G, e)$  nadobúda hodnotu  $\psi(G, e) = n$ “*

# Program na výpočet Kászonyiho funkcie

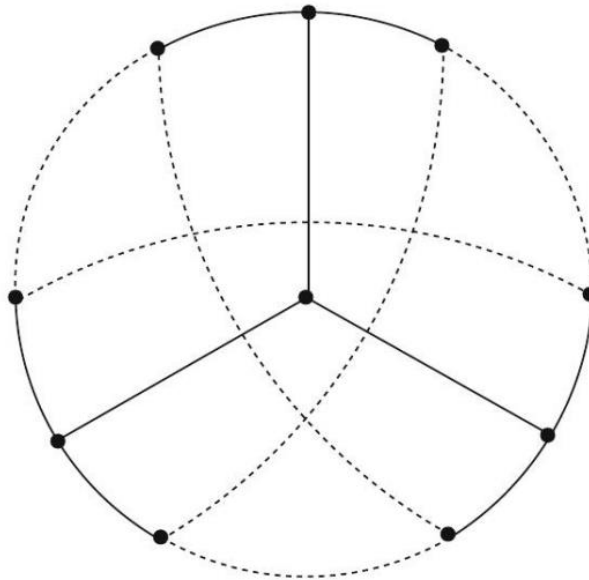
- Akceptácia všeobecnejších štandardizovaných vstupných súborov

# Program na výpočet Kászonyiho funkcie

- Akceptácia všeobecnejších štandardizovaných vstupných súborov
- Výpočtová časť – algoritmus založený na metóde „Path decomposition“
  - Idea algoritmu spočíva na postupnom pridávaní minimálnych kružníc a pamätaní si možných farbení pre už vybrané hrany
  - Pre kubické grafy „so štruktúrou“ je algoritmus výrazne rýchlejší ako bežne používané algoritmy na počítanie hranových 3-farbení
  - S jeho pomocou sme určili hodnotu Kászonyiho funkcie pre rotačné binárne snarky až do 1500 vrcholov
  - Pre porovnanie: SAT solver – rádovo 100 vrcholov

# Kászonyiho funkcia a rotačné binárne snarky

- Binárny snark  $T$  sa skladá z troch izomorfných binárnych stromov, ktorých korene sú napojené na centrálny vrchol  $r$

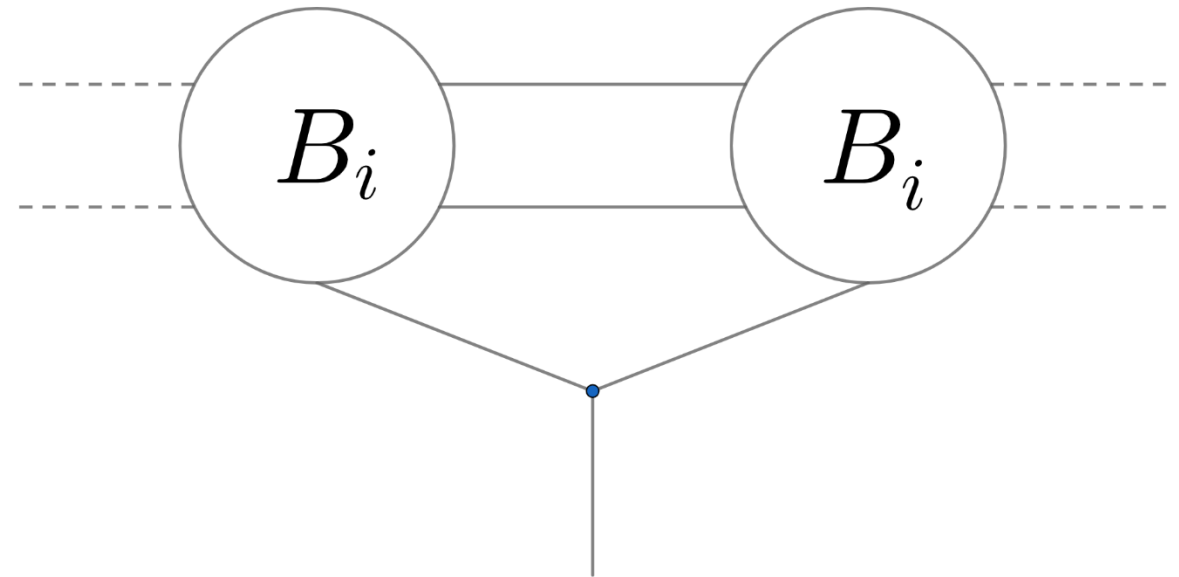
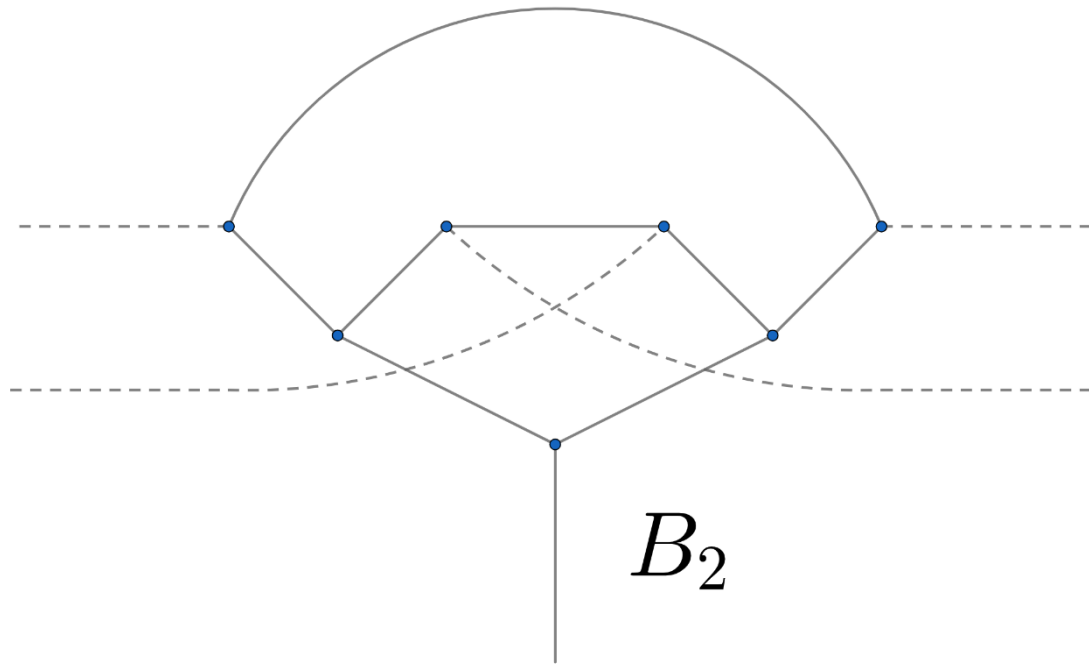


# Konštrukcia rotačných binárnych snarkov

- Prevzatá z práce *Superposition of snarks* (M. Škoviera, E. Máčajová)
- Vo svojej práci autori tiež dokazujú, že ľubovoľný graf skonštruovaný daným spôsobom je snark

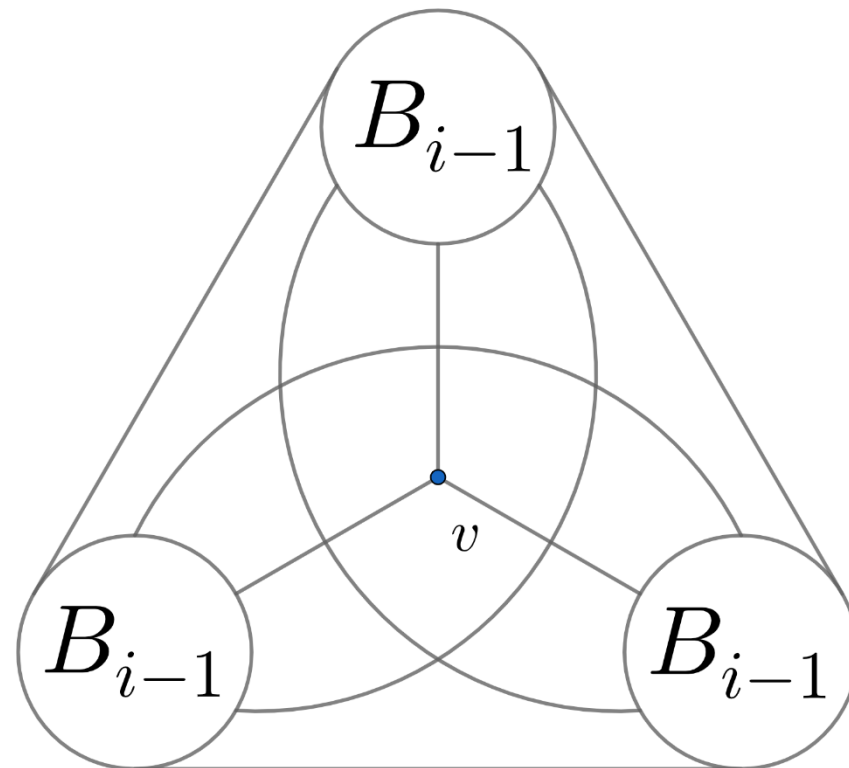
# Konštrukcia rotačných binárnach snarkov

- $(2, 2, 1)$ -pól  $B_2$  je takzvaný Petersenov negátor
- $(2, 2, 1)$ -pól  $B_{i+1}$  získame rekurzívnym spojením dvoch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_i$



# Konštrukcia rotačných binárnach snarkov

- Výsledný rotačný binárny snark  $G_i$  skonštruujeme z troch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_{i-1}$  nasledovným spôsobom:



# Kászonyiho funkcia pre rotačné binárne snarky

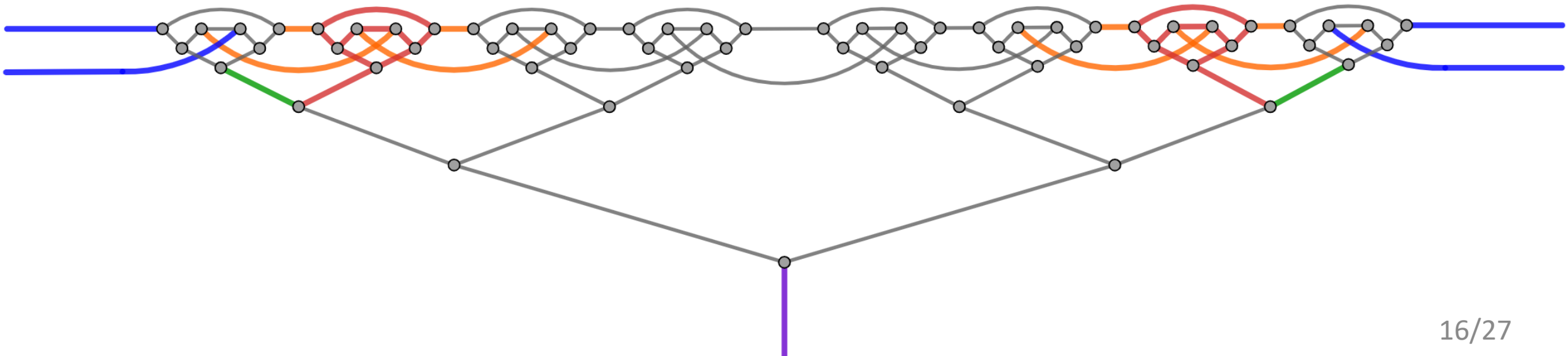
- Pre  $i < 6$  Kászonyiho funkcia na rotačných binárnych snarkoch  $G_i$  nenadobúda zovšeobecniteľný vzor
- Pre  $i \geq 6$  vieme hrany každého rotačného binárneho snarku  $G_i$  rozdeliť do 6 tried, a pre každú triedu vieme hodnotu Kászonyiho funkcie určiť parametricky – v závislosti od  $i$



- Sivé hrany:  $\psi(e_i) = 0$
- Hodnota Kászonyiho funkcie pre ostatné typy hrán je tvaru:

$$\psi(e_i) = 2^{f(i)} \cdot 3^{g(i)}$$

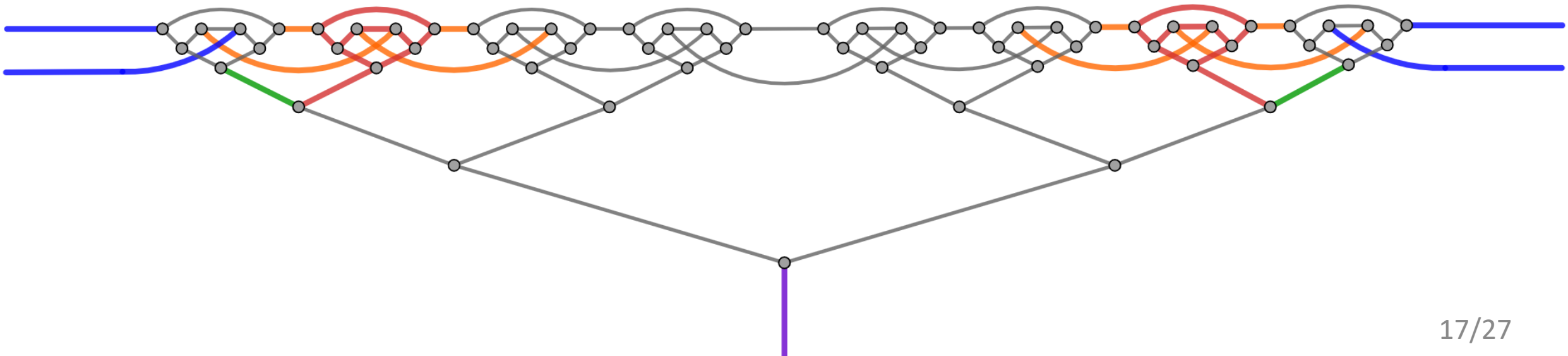
- **Modré hrany:**  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 1,$   $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 2$
- **Zelené hrany:**  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} + i - 5,$   $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 1$



- Hodnota Kászonyiho funkcie je tvaru:

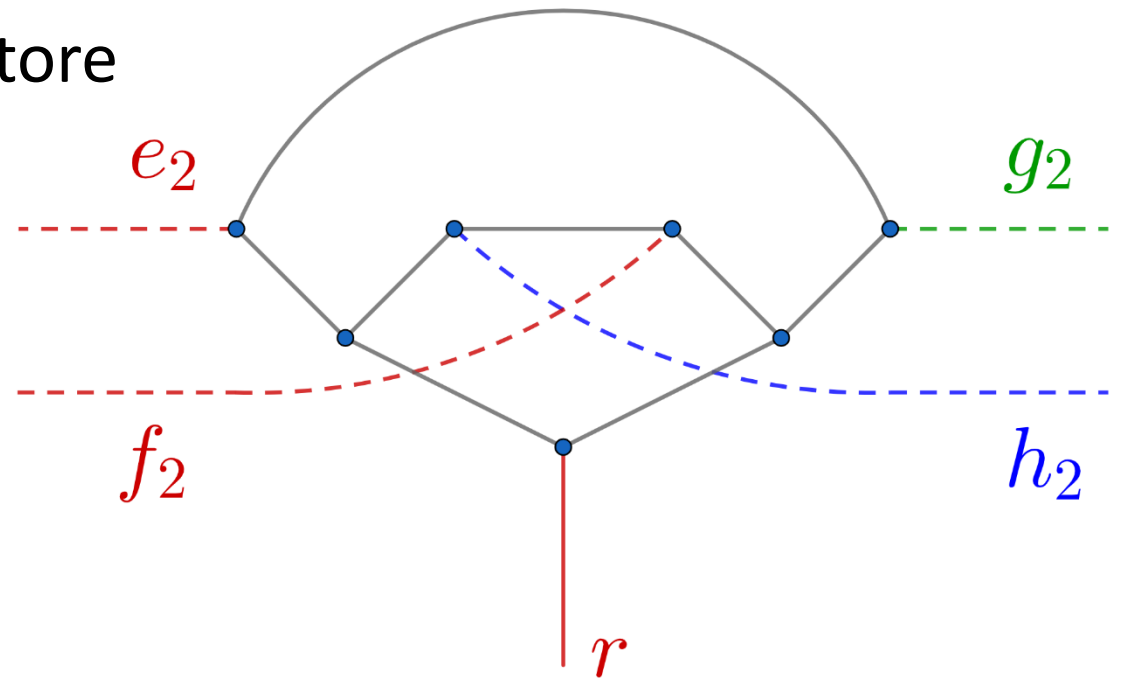
$$\psi(e_i) = 2^{f(i)} \cdot 3^{g(i)}$$

- Oranžové hrany:  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} + i - 6,$   $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 1$
- Červené hrany:  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} + i - 7,$   $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4}$
- Fialové hrany:  $f(i) = 3 \cdot 2^{i-4} - 2,$   $g(i) = 3 \cdot 2^{i-4}$



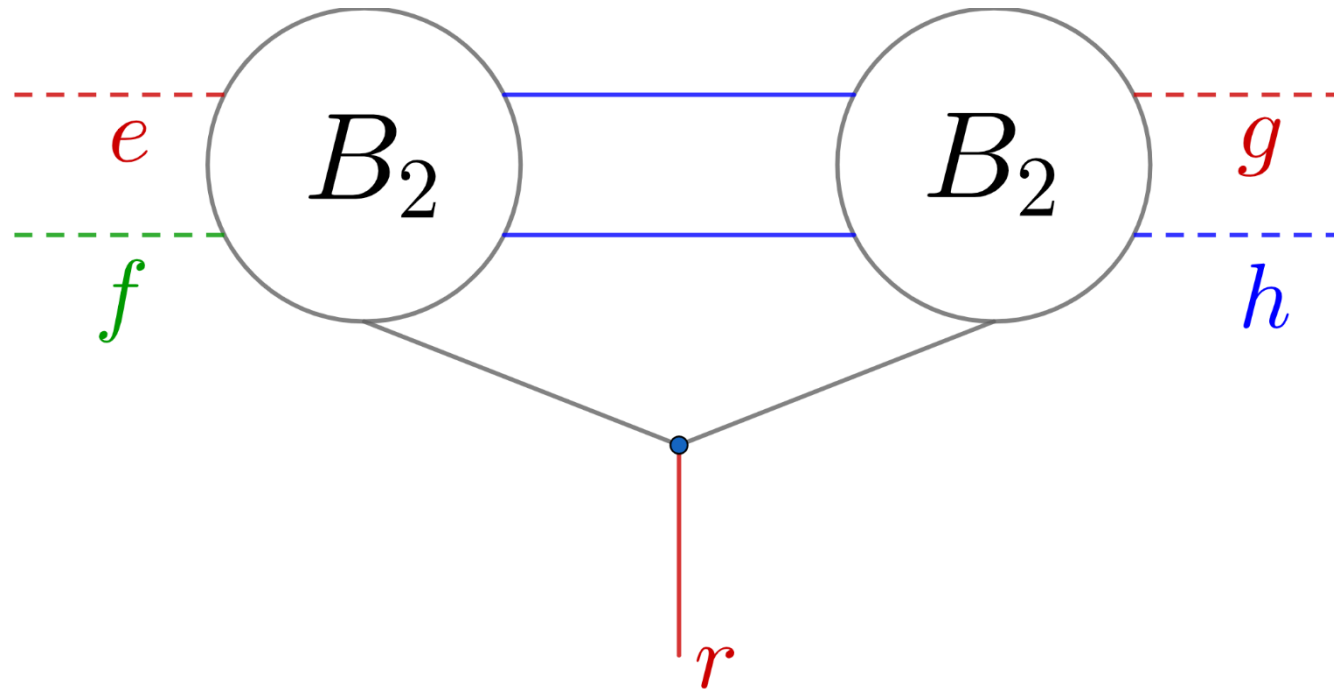
# Dôkaz pre vnútorné sivé hrany

- Dá sa ukázať, že pri každom 3-farbení Petersenovho negátora  $B_2$  sú hrany na jednom z konektorov zafarbené rovnakou farbou
- Z paritynej lemy vyplýva, že hrany na zvyšnom ne-reziduálnom konektore sú zafarbené každá inou farbou



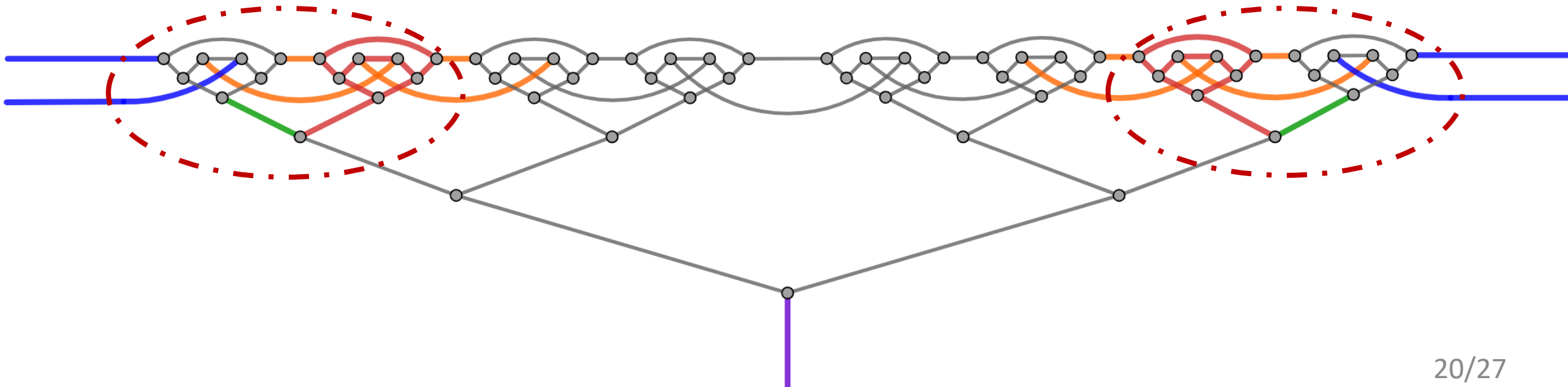
# Dôkaz pre vnútorné sivé hrany

- $(2, 2, 1)$ -pól  $B_3$  vznikne spojením dvoch  $(2, 2, 1)$ -pólov  $B_2$ , preto má pri každom 3-farbení zafarbené hrany v rámci jedného konektora každú inou farbou



# Dôkaz pre vnútorné sivé hrany

- Potlačenie vnútornej sivej hrany nezmení štruktúru podgrafov  $B_3$ , ktoré sú „na krajoch“ výsledného  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$
- Možné zafarbenia visiacych hrán  $(2, 2, 1)$ -pólu  $B_i$  ostanú nezmenené
- Preto výsledný graf  $G_{i+1} \sim e$  ostáva nezafarbiteľný

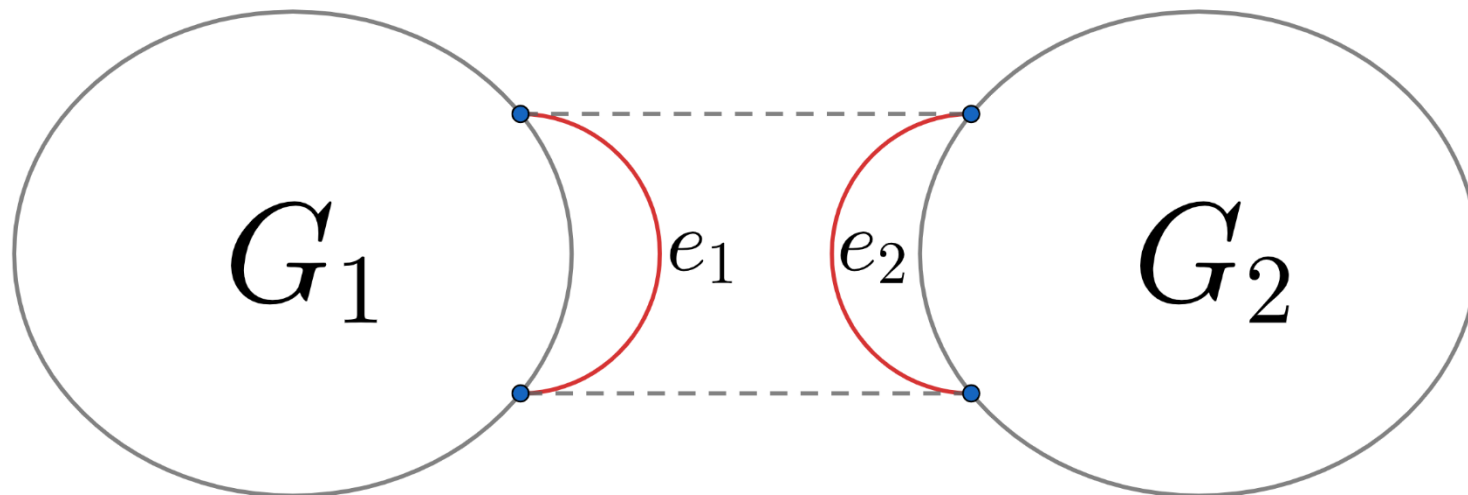


# Maximálne farbenia na 4-regulárnych grafoch

- Vychádzame z článku *Enumerating the edge-colourings and total colourings of a regular graph* (S. Bessy, F. Havet)
- Autori v ňom vyslovia hypotézu:  
„koľko najviac rôznych hranových 3-farbení môže mať jednoduchý kubický graf vzhľadom na počet vrcholov“
- Autori tiež skonštruujú nekonečnú triedu grafov, ktorá nadobúda toto maximum
- My sa zaoberáme analogickým problémom na 4-regulárnych grafoch

# 2-join dvoch 4-regulárnych grafov

- 2-join grafov  $G_1$  a  $G_2$  je odobratie hrán  $e_1 \in G_1, e_2 \in G_2$  a následné spojenie incidentných vrcholov
- Nech 4-regulárne grafy  $G_1$  a  $G_2$  mali  $\chi(G_1)$  a  $\chi(G_2)$  rôznych hranových farbení
- Potom výsledný graf má  $\chi(G_1) \cdot \chi(G_2) / 4$  hranových 4-farbení



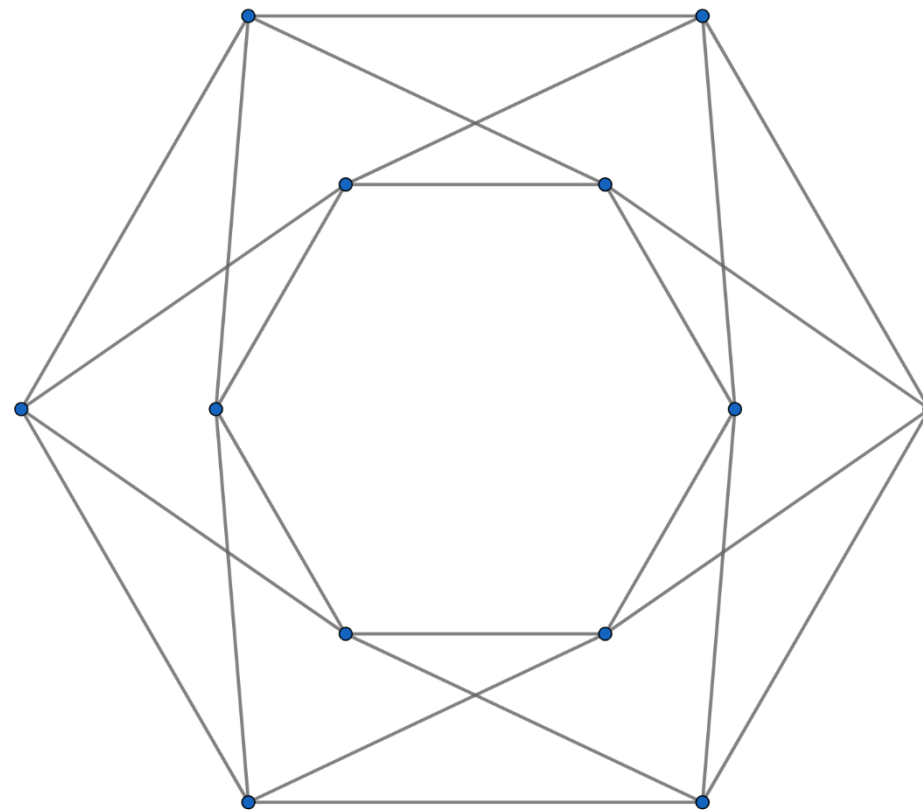
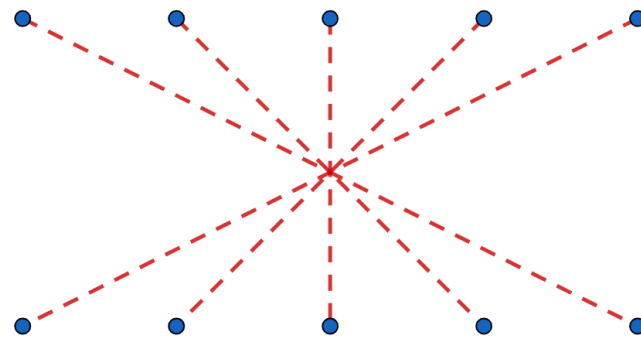
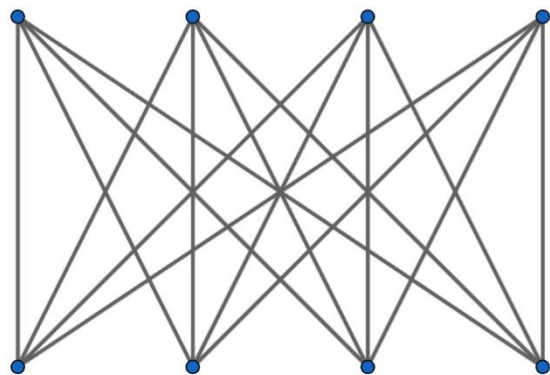
# Skúmanie malých grafov pomocou programu

- Prehľadali sme 4-regulárne grafy (bez trojuholníkov) do 18 vrcholov
- Po analýze výsledkov sme skonštruovali nekonečnú triedu 4-regulárnych grafov, ktorá ponúka najlepší známy dolný odhad na problém maximálneho počtu hranových 4-farbení na 4-regulárnych grafoch
- Výsledkom skúmania je aj pozorovanie, že nájsť triedu grafov, ktorá by intuitívne mohla byť tesným dolným odhadom je náročné



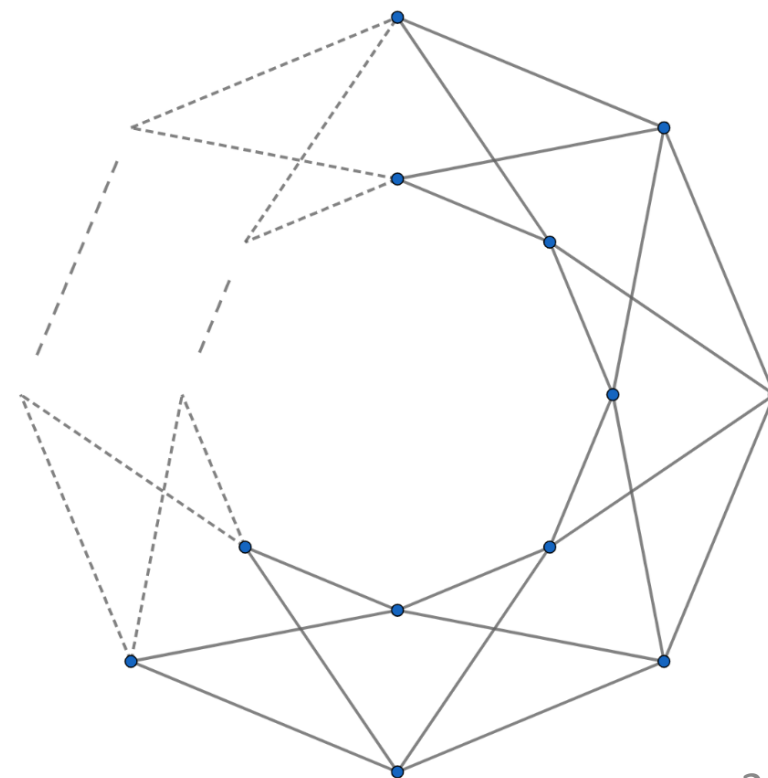
# Malé grafy, na ktorých sa nadobúda maximum

- 8 vrcholov –  $K_{4,4}$
- 10 vrcholov –  $K_{5,5} - M$
- 12 vrcholov –  $T_{12}$
- 14 vrcholov –  $T_{14}$



# Malé grafy, na ktorých sa nadobúda maximum

- 16 vrcholov – 2-join dvoch grafov  $K_{4,4}$  ( $T_{16}$  je druhý najlepší)
- 18 vrcholov – 2-join  $K_{4,4}$  a  $K_{5,5} - M$  s dvojnásobnou hranou ( $T_{18}$  je druhý najlepší)



# Generovanie triedy grafov ako dolného odhadu

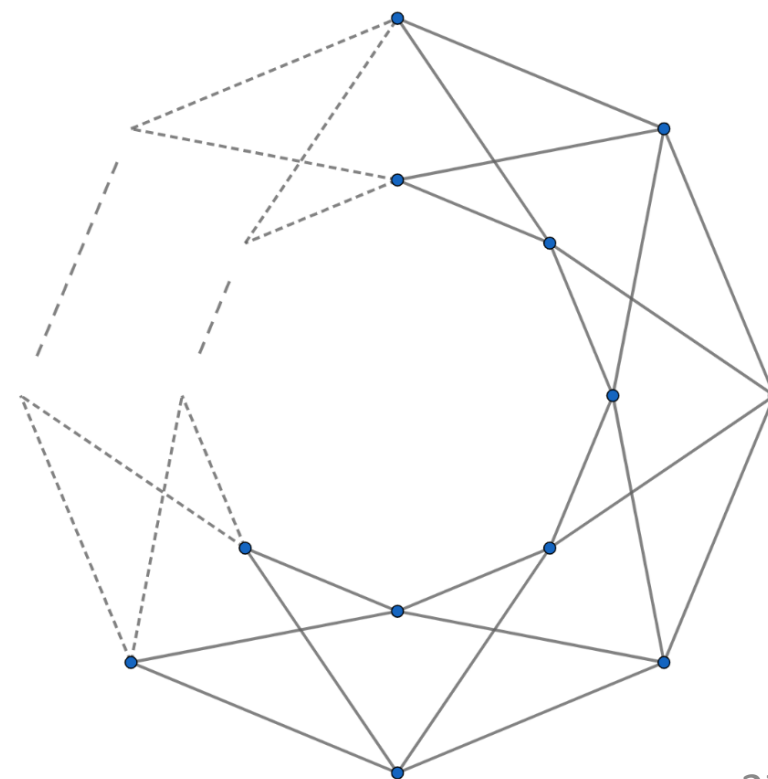
- Pomocou dynamického programovania sme vygenerovali množinu potenciálnych kandidátov na maximálne grafy pre väčšie  $n$
- Každý graf veľkosti  $n$  vznikne ako maximum z 2-joinov predošlých grafov a grafu citadela  $T_n$
- Výsledkom je, že pre  $n > 18$  je najlepším kandidátom graf citadela  $T_n$
- Trieda grafov  $T_n$  ponúka najlepši známy dolný odhad problému
- Súčasťou výsledkov výskumu je aj teoretický dôkaz počtu farbení grafu citadela  $T_n$  v závislosti od počtu vrcholov  $n$

# Počet hranových 4-farbení na citadelách

- Pre  $n \geq 12$  má 4-regulárny graf citadela  $T_n$  na  $n$  vrcholoch nasledovný počet hranových 4-farbení:

$$2^n + 2^{n/2} + 2^{n/2+2}, \quad \text{ak } 4 \mid n$$

$$2^n - 2^{n/2+1}, \quad \text{ak } 4 \nmid n.$$



Ďakujem za pozornosť