

Úlohy k cvičeniu č. 1

Princíp matematickej indukcie: nech $X \subseteq \mathbb{N}$ je množina prirodzených čísel taká, že:

- (i) $0 \in X$.
- (ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak $n \in X$, tak $n + 1 \in X$.

Potom $X = \mathbb{N}$.

V prípade, že máme danú postupnosť výrokov $(V(n))_{n \in \mathbb{N}}$, môžeme za X zvoliť množinu tých $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré je výrok $V(n)$ pravdivý. Ako priamy dôsledok princípu matematickej indukcie tak dostávame nasledujúcu vetu:

Veta 1. *Nech $(V(n))_{n \in \mathbb{N}}$ je postupnosť výrokov taká, že*

- (i) *Výrok $V(0)$ je pravdivý.*
- (ii) *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n + 1)$.*

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Tvrdenie (i) predchádzajúcej vety sa nazýva *báza indukcie* a tvrdenie (ii) sa nazýva *indukčný krok*.

Princíp matematickej indukcie nemožno dokázať – ide o jednu z tzv. *Peanových axiém*, ktorá je ale ekvivalentná inému pomerne očividnému tvrdeniu, tzv. *vlastnosti dobrého usporiadania množiny \mathbb{N}* (viď nižšie). Je teda možné chápať princíp matematickej indukcie ako axiómu a vlastnosť dobrého usporiadania množiny \mathbb{N} ako dôsledok tejto axiómy, alebo naopak.

1. Dokážte:

- a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

3. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Dokážte:

- a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

- b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ platí

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

- c) Nájdite čo možno najjednoduchší spôsob, ako sa v tvrdení z predchádzajúcej podúlohy zbaviť predpokladu $q \neq 1$.

5. Dokážte:

a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

c) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

6. Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definujeme n -té harmonické číslo ako

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

(N. B.: Dôsledkom je, že postupnosť harmonických čísel diverguje.)

7. Pre nenulové prirodzené čísla a, b budeme písať $a \mid b$, ak a delí b . Dokážte:

a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}.$$

b) Pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$k^2 + k + 1 \mid k^{n+2} + (k+1)^{2n+1}.$$

V nasledujúcej úlohe možno použiť napríklad indukciu vzhľadom na n , pričom báza tejto indukcie sa dokáže ďalšou indukciou, tentokrát vzhľadom na k . Alternatívne možno tvrdenie dokazovať indukciou vzhľadom na k a bázu dokázať indukciou vzhľadom na n .

8. Uvažujme zobrazenie $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ dané nasledovne:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 2, \\ f(n+1,k) &= f(n,k) + 2(n+k+2), \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, \\ f(n,k+1) &= f(n,k) + 2(n+k+1), \quad \forall n, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$f(n,k) = (n+k+2)^2 - n - 3k - 2.$$

Často sa stáva, že tvrdenie platí (alebo dáva zmysel) iba pre prirodzené čísla n väčšie alebo rovné ako nejaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Pomocou princípu matematickej indukcie ale možno ľahko dokázať platnosť nasledujúceho variantu vety 1:

Veta 2. Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$ je postupnosť výrokov taká, že

(i) Výrok $V(n_0)$ je pravdivý.

(ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n+1)$.

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

9. Dokážte vetu 2 (s použitím princípu matematickej indukcie).
10. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq 2$ platí $n^2 \geq 2n$.
11. Nech $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sú ľubovoľné konečné množiny prirodzených čísel také, že $|A| = m \geq 1$ a $|B| = n \geq 1$. Položme

$$A + B = \{a + b \mid a \in A; b \in B\}.$$

Dokážte, že potom

$$|A + B| \geq m + n - 1$$

a ukážte, že tento dolný odhad je tesný¹ pre všetky $m, n \geq 1$.

Pri dôkaze indukčného kroku sa pri „bežnej“ matematickej indukcii (podľa vety 1 resp. vety 2) odvodzuje platnosť výroku $V(n+1)$ len na základe predpokladu platnosti výroku $V(n)$ – tento predpoklad nazývame *indukčným predpokladom*. Formálne sa teda nemožno odvolávať na platnosť výrokov $V(j)$ pre $j < n$; indukčným predpokladom je iba platnosť výroku $V(n)$.

Ľahko možno nahliadnuť, že ide o umelé a čisto formálne obmedzenie. Ak totiž v báze indukcie dokážeme platnosť výroku $V(n_0)$ a následne dokážeme indukčný krok pre $n = n_0, \dots, k-1$, ľahko vidieť, že sú pravdivé *všetky* výroky $V(n_0), V(n_0+1), \dots, V(k)$. Pri dôkaze indukčného kroku pre $n = k$ sa teda môžeme odvolávať aj na platnosť výrokov $V(j)$ pre $n_0 \leq j < k$: ľahko možno dokázať, že záver vety 2 – čiže pravdivosť výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ – bude aj v tomto prípade zaručený. Túto myšlienku možno sformalizovať nasledovne:

Veta 3. Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$ je postupnosť výrokov taká, že

- (i) Výrok $V(n_0)$ je pravdivý.
- (ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$ platí: ak sú pravdivé výroky $V(n_0), V(n_0+1), \dots, V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n+1)$.

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

Veta 3 sa niekedy nazýva *princípom úplnej matematickej indukcie*, prípadne *princípom silnej matematickej indukcie*.

V tejto súvislosti treba upozorniť na skutočnosť, že predovšetkým vo filozofickej logike sa niekedy používa pojem úplnej indukcie vo vzťahu k tzv. neúplnej indukcii; tá v matematike nemá miesto, no často sa používa v empirických vedách (z 1000 neúspešných pokusov o prerazenie hlavy múrom napríklad môže empirická veda trochu neuvážene usúdiť, že to nie je možné; o matematický dôkaz ale nejde). Podľa tejto terminológie je matematická indukcia *vždy* úplná, hoci nejde o úplnú matematickú indukciu v zmysle zavedenom vyššie.

12. Dokážte vetu 3 (s použitím vety 2).
Nápoveda: nech $V'(n) := V(n_0) \wedge V(n_0+1) \wedge \dots \wedge V(n)$, potom...
13. Dokážte, že každé prirodzené číslo $n \geq 2$ možno rozložiť na súčin prvočísel.
14. Pod *dichotómiou* obdĺžnikovej tabuľky čokolády rozumieme jej rozdelenie (pozdĺž hrán medzi štvorcami) na dve obdĺžnikové tabuľky, ktoré dohromady obsahujú rovnaký počet štvorcov ako pôvodná tabuľka. Dokážte, že každú obdĺžnikovú tabuľku čokolády o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ štvorcov možno rozdeliť na jednotlivé štvorce pomocou $n-1$ dichotómií.

Pri použití úplnej matematickej indukcie je často nutné dokázať „viacero báz indukcie“. Ide najmä o tie situácie, kde sa v dôkaze indukčného kroku odvolávame na platnosť aspoň jedného výroku $V(n-j)$ pre $j \geq 1$. Takýto dôkaz indukčného kroku je vo všeobecnosti neprípustný pre n také, že $n-j < n_0$ (kde n_0 má význam z vety 3), pretože o $V(n-j)$ v takom prípade vo všeobecnosti nevieme vôbec nič (dokonca ani to, či takýto výrok dáva zmysel). Preto treba „malé hodnoty“ čísla n ošetriť osobitne. Čitateľ by iste dokázal upraviť vetu 3 tak, aby brala na zreteľ aj tento prípad.

¹K ľubovoľnej dvojici prirodzených čísel $m, n \geq 1$ teda existujú konečné množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ také, že $|A| = m$, $|B| = n$ a $|A+B| = m+n-1$.

15. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 3a + 5b$.
16. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 4a + 5b$.
17. Dokážte tvrdenia z predchádzajúcich dvoch úloh bez použitia úplnej matematickej indukcie.

Fibonacciho čísla sú definované nasledujúcim rekurentným predpisom:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

V nasledujúcom budeme používať označenia

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Číslo φ sa zvykne nazývať *zlátý rez*.

18. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n).$$

19. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ platí

$$\varphi^n = \varphi F_n + F_{n-1}.$$

20. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1.$$

21. Dokážte:

a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n F_{2k+1} = F_{2n+2}.$$

b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

22. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

23. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

„Veta“ 4. Pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$ platí $a = b$.

„Dôkaz“. Matematickou indukciovou vzhľadom na $M := \max\{a, b\}$.

1° Pre $M = 0$ nutne $a = b = 0$ a tvrdenie platí.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $M = k$. Ukážeme, že platí aj pre $M = k + 1$.

Nech $a, b \in \mathbb{N}$ sú čísla také, že $\max\{a, b\} = k + 1$. Potom $\max\{a - 1, b - 1\} = k$. Z indukčného predpokladu teda vyplýva, že platí $a - 1 = b - 1$, a teda aj $a = b$. \square

24. Nájdite chybu v „dôkaze“ „vety“ 4.

Hovoríme, že lineárne usporiadaná množina $(X, <)$ je *dobře usporiadaná*, ak každá neprázdna množina $A \subseteq X$ má v usporiadaní $<$ najmenší prvok. Množina \mathbb{N} je dobre usporiadaná – ide o jednu z jej kľúčových vlastností, ktorá je ekvivalentná princípu matematickej indukcie (a teda môže byť považovaná za jednu z axiém Peanovej aritmetiky práve namiesto princípu matematickej indukcie).

V prípade, že sa pomocou matematickej indukcie dá dokázať pravdivosť nejakého výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, je možné rovnaké tvrdenie dokázať aj s použitím princípu dobrého usporiadania. Stačí za účelom sporu predpokladať, že množina $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \wedge \neg V(n)\}$ je neprázdna. V takom prípade má táto množina najmenší prvok m . Zostáva dokázať, že:

- (i) Nemôže platiť $m = n_0$ – to je zrejme ekvivalentné dôkazu pravdivosti výroku $V(n_0)$, a teda báze matematickej indukcie.
- (ii) Ak $m > n_0$, tak nutne $m - 1 \in A$, čo je spor s minimalitou m . Tu sa v skutočnosti dokazuje iba implikácia „ak $\neg V(m)$, tak $\neg V(m - 1)$ “, čo je obmena implikácie „ak $V(m - 1)$, tak $V(m)$ “. Keďže $m > n_0$, môžeme zaviesť premennú $n := m - 1$, čím konečne dostávame implikáciu „ak $V(n)$, tak $V(n + 1)$ “ z indukčného kroku.

Na dôkaz s využitím vlastnosti dobrého usporiadania množiny \mathbb{N} sa teda možno dívať ako na „matematickú indukciu sporom“.

25. Z princípu matematickej indukcie odvodte vlastnosť dobrého usporiadania množiny \mathbb{N} .

26. Z vlastnosti dobrého usporiadania množiny \mathbb{N} odvodte princíp matematickej indukcie.

27. Dokážte tvrdenia z úloh 1, 10 a 15 pomocou vlastnosti dobrého usporiadania množiny \mathbb{N} .