

Úlohy k cvičeniu č. 4

Definícia 1 (Variácie s opakovaním). Nech $A = \{1, \dots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. Variáciou s opakovaním k -tej triedy z n prvkov množiny B nazveme ľubovoľné zobrazenie $f: A \rightarrow B$, čiže prvok množiny B^A .

Veta 1. Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním k -tej triedy z n prvkov množiny B je n^k .

Definícia 2 (Variácie bez opakovania). Nech $A = \{1, \dots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. Variáciou bez opakovania k -tej triedy z n prvkov množiny B nazveme ľubovoľné injektívne zobrazenie $f: A \rightarrow B$.

Veta 2. Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií bez opakovania k -tej triedy z n prvkov množiny B je

$$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

1. Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X ?
2. Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré majú všetky prvky rôzne?
3. Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré začínajú párnym číslom?
4. Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré začínajú nepárnym číslom?
5. Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?
6. V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Koľko existuje rôznych ťahov, ak záleží na poradí vytiahnutých čísel?
7. Máme $n \geq 7$ kníh, ale len 7 voľných miest na policičke. Koľko máme možností na uloženie kníh na prázdne miesta?
8. Koľko prvkov obsahuje množina X taká, že počet variácií bez opakovania druhej triedy z prvkov X je 240?
9. Máme množinu, ktorá má x prvkov. Ak sa počet jej prvkov zväčší o 2, tak počet variácií bez opakovania tretej triedy z jej prvkov sa zväčší o 384. Nájdite x .

Definícia 3 (Permutácie bez opakovania). Nech $A = \{1, \dots, n\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. Permutáciou množiny B nazveme ľubovoľné bijektívne zobrazenie $f: A \rightarrow B$, čiže variáciu bez opakovania n -tej triedy z n -prvkov množiny B .

Veta 3. Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Počet permutácií množiny B je

$$n! := n^{\underline{n}} := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (n-k).$$

10. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť policička štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo práve jedno čierne policičko?
11. Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 100-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?

12. Dievčatá na večierku sa rozhodli, že si zatancujú kruhový tanec. Koľkými rôznymi spôsobmi sa mohli postaviť do kruhu, ak dievčat bolo n ?

Definícia 4 (Kombinácie bez opakovania). Nech B je konečná množina taká, že $|B| = n$ a nech $k \in \mathbb{N}$. Kombináciou bez opakovania k -tej triedy z n prvkov množiny B nazveme ľubovoľnú k -prvkovú podmnožinu množiny B .

Množina všetkých k -prvkových podmnožín konečnej množiny B – čiže množina všetkých kombinácií k -tej triedy z B – sa zvykne označovať ako $\mathcal{P}_k(B)$ alebo ako $\binom{B}{k}$.

Veta 4. Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet kombinácií bez opakovania k -tej triedy z n prvkov množiny B je

$$|\mathcal{P}_k(B)| = \left| \binom{B}{k} \right| = \binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n^k}{k!}.$$

Ak navyše $k \leq n$, tak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

13. V hre Mates sa ťahá 5 čísel z 35. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých čísel?
14. V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Z nich je šesť čísel riadnych a jedno dodatkové. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých riadnych čísel, ale záleží na rozdieli medzi riadnym a dodatkovým číslom?
15. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú rovnaký počet oboch písmen?
16. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a ?
17. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a ?
18. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 6 alebo 7 výskytov písmena a ?
19. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku párny počet bielych políčok?
20. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $2n \times 2n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku bolo rovnako veľa bielych a čiernych políčok?
21. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku aj stĺpci párny počet bielych políčok?
22. Za okrúhly stôl s $2n$ stoličkami chceme usadiť n manželských párov. Manželia musia sedieť vedľa seba, ale je jedno, či muž bude napravo od manželky alebo opačne. Koľkými spôsobmi ich môžeme usadiť, ak
- rozlišujeme stoličky?
 - nerozlišujeme stoličky?

V nasledujúcich úlohách rozumieme pod *kartou* usporiadanú dvojicu

$$(c, n) \in \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\},$$

kde c nazývame *farbou karty* a n nazývame *číslom karty*. Množina čísel je lineárne usporiadaná usporiadaním $2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < J < Q < K < A$. Pod *pokrovou kombináciou* rozumieme ľubovoľnú množinu piatich (rôznych) kariet.

23. Koľko je všetkých pokrových kombinácií?
24. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet rovnakej farby (*straight flush*)?
25. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich štyri karty s rovnakým číslom?
26. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$ (*full house*)?
27. Koľko je všetkých pokrových kombinácií iných ako *full house*?
28. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, v ktorých majú všetky karty rovnakú farbu (*flush*)?
29. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet ľubovoľnej farby (*straight*)?
30. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x , dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z , pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (*dva páry*)?