

# Riešenia prvej sady domácich úloh

Anna Kompišová

14. marca 2018

**Úloha 1.** Potrebujeme na obálku nalepiť známky v hodnote  $n$  centov, aby sme ju mohli odoslať. K dispozícii máme len známky v hodnote 5 centov a 12 centov. Z každého typu známok máme nekonečne veľa kusov. Dokážte, že sa to dá spraviť pre ľubovoľné  $n \geq 44$ .

*Riešenie.* Dôkaz budeme robiť úplnou matematickou indukciou vzhľadom na  $n$ .

V báze indukcie vyriešime prípady pre  $n \in \{44, 45, 46, 47, 48\}$ :

- $n = 44 = 5 \cdot 4 + 12 \cdot 2$
- $n = 45 = 5 \cdot 9 + 12 \cdot 0$
- $n = 46 = 5 \cdot 2 + 12 \cdot 3$
- $n = 47 = 5 \cdot 7 + 12 \cdot 1$
- $n = 48 = 5 \cdot 0 + 12 \cdot 4$

Predpokladajme, že vieme zaplatiť ľubovoľnú sumu od 44 po nejaké  $k$ . Ukážeme, že vieme zaplatiť aj sumu  $n = k + 1$ .

Môžeme predpokladať, že  $k \geq 48$ , preto  $n - 5 = k + 1 - 5 \geq 44$ . Z toho dostávame, že na  $n - 5$  môžeme použiť indukčný predpoklad, preto existujú  $p, q \in \mathbb{N}$  také, že

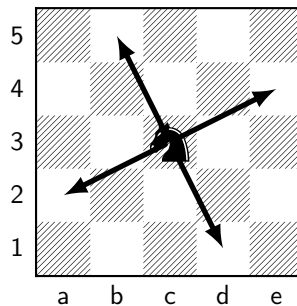
$$n - 5 = 5 \cdot p + 12 \cdot q.$$

Z toho jednoduchou úpravou dostaneme, že

$$n = 5 \cdot (p + 1) + 12 \cdot q.$$

Inak povedané, ak na zaplatenie hodnoty  $n - 5$  potrebujeme  $p$  známok v hodnote 5 centov a  $q$  známok v hodnote 12 centov, tak na zaplatenie hodnoty  $n$  potrebujeme tie isté známky a jednu 5 centovú navyše.  $\square$

**Úloha 2.** *Ľavobočivý kôň* je šachová figúrka, ktorá si vyberie smer, ktorým sa pohne od dve políčka dopredu a nakoniec zabočí doľava a pohne sa ešte o jedno políčko (viď obrázok).



*Prehnané iniciatívny ľavobočivý kôň* je šachová figúrka, ktorej jeden ťah pozostáva z ľubovoľného nenulového počtu ťahov ľavobočivého koňa. Dokážte, že ak ľubovoľne uložíme na štandardnú šachovnicu 6 prehnané iniciatívnych ľavobočivých koní, tak zaručene existujú dvaja, ktorí sa ohrozujú.

*Riešenie.* Šachovnicu si rozdelíme na 5 oblastí tak, aby sa dva prehnané iniciatívne ľavobočivé kone ohrozovali, ak sú v jednej oblasti. Oblasti sú označené číslami od 1 do 5:

8	3	5	2	4	1	3	5	2
7	2	4	1	3	5	2	4	1
6	1	3	5	2	4	1	3	5
5	5	2	4	1	3	5	2	4
4	4	1	3	5	2	4	1	3
3	3	5	2	4	1	3	5	2
2	2	4	1	3	5	2	4	1
1	1	3	5	2	4	1	3	5
	a	b	c	d	e	f	g	h

Zjavne, ak jeden prehnane iniciatívny ľavobočivý kôň stojí na políčku s číslom  $a$ , tak ohrozuje všetky políčka s číslom  $a$ . Ak ľubovoľne umiestnime na šachovnicu 6 prehnane iniciatívnych ľavobočivých koní, tak podľa dirichletovho princípu budú aspoň dva z nich stáť na políčkach s rovnakým číslom. Takéto kone sa budú ohrozovať.  $\square$

**Úloha 3.** Majme jednu sadu štandardných žolíkových kariet bez žolíkov (t.j. 52 kariet). Koľko najmenej kariet musíme z balíčku potiahnuť, aby sme mali absolútnu istotu, že máme na ruke postupku? Postupka sa skladá z troch po sebe idúcich kariet rovnakej farby a nemôže obsahovať zároveň eso aj kráľa.

*Riešenie.* Dokážeme, že musíme potiahnuť 37 kariet, aby sme mali absolútnu istotu, že máme na ruke postupku.

Najprv ukážeme, že existuje 36 kariet, z ktorých žiadne tri netvoria postupku. Takú množinu môžeme vytvoriť tak, že zoberieme z každej farby karty s číslami 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10,  $J$ ,  $K$  (vynechali sme každú tretiu). Zjavne, ak by sme potiahli takúto množinu kariet, tak ešte na ruke nemáme postupku.

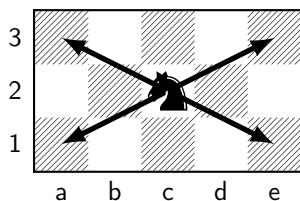
Teraz ukážeme, že ak potiahneme ľubovoľných 37 kariet, budeme mať na ruke postupku. Podľa rozšíreného dirichletovho princípu vieme, že ak potiahneme 37 náhodných kariet, tak existuje farba, z ktorej máme aspoň 10 kariet. Karty tejto farby si rozdelíme na 5 častí:

$$1, 2, 3 \mid 4, 5, 6 \mid 7, 8, 9 \mid 10, J, Q \mid K$$

Máme dve možnosti, buď sme potiahli kráľa, alebo nie. V oboch prípadoch zostáva aspoň 9 kariet, ktoré nie sú kráľ. Podľa dirichletovho princípu, ak máme 9 kariet, ktoré spadajú do štyroch častí, tak existuje časť, v ktorej sú 3 karty. Tieto karty nutne tvoria postupku.

Tým sme dokázali, že musíme potiahnuť najmenej 37 kariet, aby sme mali istotu, že máme na ruke postupku.  $\square$

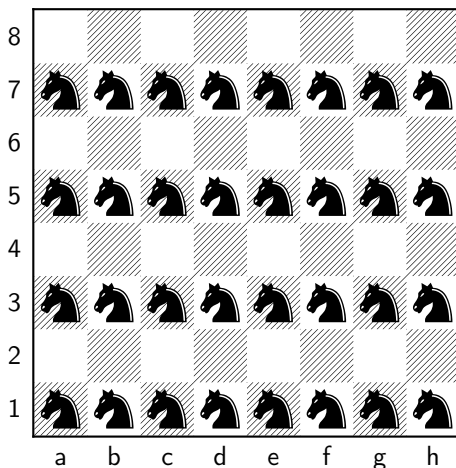
**Úloha 4.** *Špecializovaný kôň* je šachová figúrka, ktorá sa v jednom ťahu môže pohnúť o dve políčka vodorovne a jedno políčko zvisle (viď obrázok).



Koľko najviac špecializovaných koní možno umiestniť na štandardnú šachovnicu tak, aby sa žiadne dva neohrozovali?

*Riešenie.* Ukážeme, že na šachovnicu sa dá umiestniť najviac 32 špecializovaných koní.

Môžeme si všimnúť, že kôň v riadku  $k$  ohrozuje len políčka v riadku  $k - 1$  a  $k + 1$ . Preto sa špecializované kone v jednom riadku nebudú ohrozovať. Špecializované kone teda môžeme umiestniť na každé políčko každého nepárneho riadku. Takto umiestnime 32 špecializovaných koní, ktoré sa navzájom nebudú ohrozovať.



Teraz ukážeme, že ak umiestnime 33 koní, tak budú existovať dva, ktoré sa ohrozujú.

Šachovnicu si rozdelíme na 32 oblastí tak, aby sa špecializované kone umiestnené do jednej oblasti ohrozovali.

8	27	28	25	26	31	32	29	30
7	25	26	27	28	29	30	31	32
6	19	20	17	18	23	24	21	22
5	17	18	19	20	21	22	23	24
4	11	12	9	10	15	16	13	14
3	9	10	11	12	13	14	15	16
2	3	4	1	2	7	8	5	6
1	1	2	3	4	5	6	7	8
	a	b	c	d	e	f	g	h

Ak umiestnime na šachovnicu 33 špecializovaných koní tak, podľa dirichletovho princípu budú existovať dva, ktoré budú na políčku s rovnakým číslom. Tieto špecializované kone sa budú ohrozovať.  $\square$