Riešenia druhej sady domácich úloh

Anna Kompišová

5. apríla 2018

Úloha 1. Koná sa medzinárodná konferencia na ktorú prišlo 7 Francúzov, 6 Nemcov, 9 Talianov, 8 Číňanov a 5 Slovákov. Koľkými spôsobmi ich môžeme posadiť za okrúly stôl, ak chceme, aby ľudia rovnakej národnosti sedeli pri sebe? To znamená že chceme, aby každá národnosť mala svoju "súvislú" časť stola. Záleží iba na poradí usadených, nie na otočení.

Riešenie. Potrebujeme najprv určiť, v akom poradí usadíme celé národnosti. Keďže nezáleží na otočení, môžeme zafixovať jednu národnosť (napr. Slovákov). To spôsobí, že ku zvyšku kruhu sa môžeme správať rovnako ako k obyčajnej postupnosti 4 prvkov, pričom každý je tam práve raz. Preto počet možností, ako usadiť 5 národností do kruhu bude bude rovnaký ako počet permutácií 4 prvkov, teda 4!.

V každom rozmiestnení národností môžeme hostí z jednej národnosti rozmiestniť ľubovoľne a nezávisle od ostatných. Ak má národnosť n členov, potom máme $n!$ možností ako ich na určenú časť usadiť. Národnosti majú postupne 7, 6, 9, 8 a 5 členov, preto pre každé rozmiestnenie národností máme 7!6!9!8!5! možností ako usadiť konkrétnych ľudí

Celkovo teda máme $4! \times 7!6!9!8!5!$ možností, ako usadiť všetkých hostí tak, aby usadenie spĺňalo podmienky. □

Úloha 2. V jednom nemenovanom štáte sa konajú voľby. Voliči majú na výber medzi tromi kandidátmi - Supermanom, Herkulesom a Xenou. V tomto štáte majú nasledovný systém volieb. Občan pri vstupe do volebnej miestnosti obdrží n balíkov hlasovacích lístkov po 10 kusov, pričom n je nenulové prirodzené číslo. Lístky sú očíslované od 1 do $10n$. Vyplnené lístky volič odovzdá volebnej komisií, ktorá pozostáva z troch členov. Každý člen komisie si odovzdané lístky pozrie a vyhodí, ak prehlási hlasy za neplatné. Členovia komisie majú nasledovné kritériá:

- Prvý člen komisie považuje lístky za platné, iba ak volič zahlasoval aspoň polovicou hlasov za Supermana.
- Druhý člen komisie považuje lístky za platné, ak nájde aspoň jeden hlas za iného kandidáta ako Supermana.
- Tretí člen komisie kontroluje len lístky s číslom deliteľným päťkou a vyžaduje, aby každý z týchto hlasov patril Supermanovi.

Koľkými rôznymi spôsobmi môže občan voliť, ak chce aby mu jeho hlasy nevyhodili? Výsledok môžete uviesť v tvare sumy.

Riešenie. Ak chce volič zahlasovať tak, aby mu lístky komisia nevyhodila, musí splniť všetky tri podmienky komisie. Z podmienok vieme, že na každom piatom lístku musí byť označený Superman. To znamená, že $2n$ lístkov máme určených a nemusíme sa nimi zaoberať. Zostáva $8n$ lístkov, ktoré treba označiť. Aby bola splnená podmienka, že aspoň polovica lístkov patrí Supermanovi, musí volič označiť ešte aspoň $3n$ lístkov, v ktorých bude hlasovať za Supermana. Najviac však $8n-1$, aby existoval lístok, v ktorom za Supermana nehlasuje.

Možnosti rozdelíme podľa počtu hlasov za Supermana. Počet možností hlasovania, ak z $8n$ lístkov patrí k Supermanovi, je $\binom{8n}{k}2^{8n-k}$, lebo máme $\binom{8n}{k}$ možností ako vybrať podmnožinu veľkosti k z $8n$ lístkov, ktoré pôjdu Supermanovi a každý zo zvyšných $8n-k$ lístkov môžeme nezávisle prideliť Herkulovi alebo Xene (2 možnosti).

Spolu dostávame takýto počet možností:

$$\sum_{k=3n}^{8n-1} \binom{8n}{k} 2^{8n-k}$$

□

Úloha 3. Dokážte algebraicky alebo kombinatoricky identitu:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}$$

Riešenie. Asi najjednoduchší spôsob je upraviť ľavú stranu rovnosti tak, že dostaneme pravú stranu.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{n+1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\frac{n!}{(n-k)!k!} && (1)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} && (2)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1} && (3)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i}\binom{n+1}{i} && (4)\\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i}\binom{n+1}{i} - \left(\binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1}\right)\right) && (5)\\
&= \frac{1}{n+1}\Big(0 - \big(1-(n+1)\big)\Big) && (6)\\
&= \frac{n}{n+1} && (7)
\end{aligned}$$

Vysvetlivky: V kroku (1) sme ľavú stranu rošírili o $\frac{n+1}{n+1}$ a rozpísali sme kombinačné číslo. V kroku (2) sme $n+1$ z čitateľa a $k+1$ z menovateľa pripojili ku faktoriálom. To nám umožnilo vrátiť sa v kroku (3) ku kombinačnému číslu. V kroku (4) sme nahradili $k+1=l$. V kroku (5) sme k sume pripočítali špeciálne zapísanú nulu tak, aby sme mohli priamo použiť binomickú vetu. Jednoducho sme k sume pridali členy, ktoré chýbali a následne sme ich odpočítali. V kroku (6) sme použili binomickú vetu: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Ak dosadíme za $x=-1$ a za n zvolíme $n+1$, tak dostaneme

$$(1-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k$$

Pravá strana je suma, ktorú máme vyššie a ľavá strana sa zjavne rovná 0. V kroku (6) sme navyše upravili dve kombinačné čísla. Krok (7) je už len jednoduchá úprava.

Ďalším spôsobom, ktorý by sme mohli použiť je úprava binomickej vety do požadovaného tvaru a následné vhodné dosadenie za x. Ak zintegruje obe strany binomickej vety a konštantný člen výsledku určíme rovný nule dostaneme rovnosť:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

Ak teda za x dosadíme -1 a od oboch strán odpočítame prvý člen sumy (aby sa začínala od $k=1$) dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} - \frac{(-1)^1}{1}\binom{n}{0} = \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^1}{1}\binom{n}{0}$$

Následnou úpravou dostávame

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} &= 0 - \frac{1}{n+1} + 1\\
\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

□