Riešenia druhej sady domácich úloh

Anna Kompišová

25. mája 2018

Úloha 1. Na futbalovom ihrisku trénuje 10 futbalistov priamy kop na bránku. Každý futbalista má toľko pokusov, koľko chce. Na konci tréningu tréner vyrobí výsledkovku tak, že ku menu každého hráča napíše počet gólov, ktoré daný hráč dal za celý tréning. Koľko existuje rôznych výsledkoviek, ak vieme, že práve 6 hráčov dalo aspoň 6 gólov, práve 2 hráči dali najviac 3 góly a celkovo padlo 60 gólov?

Riešenie. Označme si futbalistov $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ a počet gólov, ktoré dali postupne $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$. Predstavme si, že prvých 6 hráčov dalo aspoň 6 gólov a poslední dvaja daja najviac 3 goly. Počet rôznych výsledkoviek pre tento prípad je rovnaký ako počet riešení rovnice

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j = 60$$

Za podmienok

$$\begin{array}{rcl} 6 \leq & a, b, c, d, e, f & \\ 4 \leq & g, h & \leq 5 \\ 0 \leq & i, j & \leq 3 \end{array}$$

Keďže $6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 44$ gólov je už určených môžeme úlohu preformulovať tak, že nahradíme $a = a' + 6, b = b' + 6, \ldots, f = f' + 6, g = g' + 4, h = h' + 4$ a dostaneme rovnicu:

$$a' + b' + c' + d' + e' + f' + g' + h' + i + j = 60 - 44 = 16$$

Za podmienok

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq & a', b', c', d', e', f' & \\ 0 \leq & g', h' & \leq 1 \\ 0 \leq & i, j & \leq 3 \end{array}$$

Ak by sme si nevšímali horné ohraničenia, pre posledné štyri premenné, potom by rovnica mala $\binom{16+10-1}{16}$ rešení (kombinácie s opakovaním 16-tej triedy z 10 prvkov).

Teraz od toho odpočítame riešenia, ktoré nespĺňajú aspoň jednu podmienku. Označme M_X množinu riešení, ktoré nespĺňajú všetky podmienky pre premenné v množine X. Napr. $M_{\{g',i\}}$ sú všetky riešenia rovnice v ktorých platí, že $g' \geq 2$ a $i \geq 4$ Výsledok spočítame použitím princípu zapojenia a vypojenia:

Označme M počet všetkch zlých riešení rovnice. Potom:

$$\begin{aligned} M \;=\; & M_{\{g'\}} + M_{\{h'\}} + M_{\{i\}} + M_{\{j\}} \\ & -M_{\{g',h'\}} - M_{\{g',i\}} - M_{\{g',j\}} - M_{\{h',i\}} - M_{\{h',j\}} - M_{\{i,j\}} \\ & +M_{\{g',h',i\}} + M_{\{g',h',j\}} + M_{\{g',i,j\}} + M_{\{h',i,j\}} \\ & -M_{\{g',h',i,j\}} \end{aligned}$$

Pomerne ľahko vidno, že:

- $M_{\{g'\}} = M_{\{h'\}},\ M_{\{i\}} = M_{\{j\}}$
- $M_{\{g',i\}} = M_{\{g',j\}} = M_{\{h',i\}} = M_{\{h',j\}}$
- $M_{\{g',h',i\}} = M_{\{g',h',j\}},\ M_{\{g',i,j\}} = M_{\{h',i,j\}}$

Všetky členy sa počítajú rovnakým spôsobom. Ukážeme len riešenie pre člen $M_{\{g',h',i\}}$: Chceme vypočítať počet riešení rovnice:

$$a' + b' + c' + d' + e' + f' + g' + h' + i + j = 16$$

Za podmienok

$$\begin{aligned} 0 \leq &\quad a', b', c', d', e', f' \\ 2 \leq &\quad g', h' \\ 4 \leq &\quad i \\ 0 \leq &\quad j \end{aligned}$$

To sa dá opäť preformulovať tak, že nahradíme $g' = g'' + 2, h' = h'' + 2, i = i'' + 4$. Dostávame ekvivalentný problém:

$$a' + b' + c' + d' + e' + f' + g'' + h'' + i'' + j = 16 - 8 = 8$$

Za podmienok

$$0 \leq \quad a', b', c', d', e', f', g'', h'', i'', j$$

Počet riešení tejto rovnice je rovnaký ako počet kombinácií s opakovaním ôsmej triedy (8 gólov) z 10 prvkov (futbalisti) a to je

$$\binom{8+10-1}{8}.$$

Rovnakým spôsobom by sme vypočítali všetky ostatné členy a dostali by sme:

- $M_{\{g'\}} = M_{\{h'\}} = \binom{14+10-1}{14}$ (2 góly zo 16 mal priradené futbalista G resp. H)
- $M_{\{i\}} = M_{\{j\}} = \binom{12+10-1}{12}$ (4 góly zo 16 mal priradené futbalista I resp. J)
- $M_{\{g',h'\}} = \binom{12+10-1}{12}$ (4 góly zo 16 mali priradené spolu futbalisti G a H)
- $M_{\{g',i\}} = M_{\{g',j\}} = M_{\{h',i\}} = M_{\{h',j\}} = \binom{10+10-1}{10}$ (vopred bolo priradených 6 gólov zo 16)
- $M_{\{i,j\}} = \binom{8+10-1}{8}$ (8 gólov zo 16 mali priradené spolu futbalisti I a J)
- $M_{\{g',h',i\}} = M_{\{g',h',j\}} = \binom{8+10-1}{8}$ (vopred bolo priradených 8 gólov zo 16)
- $M_{\{g',i,j\}} = M_{\{h',i,j\}} = \binom{6+10-1}{8}$ (vopred bolo priradených 10 gólov zo 16)
- $M_{\{g',h',i,j\}} = \binom{4+10-1}{8}$ (vopred bolo priradených 12 gólov zo 16)

Spolu dostávame:

$$\begin{aligned} M &= 2\binom{14+10-1}{14} + 2\binom{12+10-1}{12} - \binom{12+10-1}{12} - 4\binom{10+10-1}{10} - \binom{8+10-1}{8} \\ &\quad +2\binom{8+10-1}{8} + 2\binom{6+10-1}{8} - \binom{4+10-1}{8} \end{aligned}$$

Celý tento výpočet sme robili pri konkrétnom výbere futbalistov do jednotivých skupín. Rozdelenie do skupín však môže byť ľubovoľné. Najprv máme $\binom{10}{6}$ možností, ako vybrať futbalistov, ktorí dajú aspoň 6 gólov. Po ich vybratí máme $\binom{4}{2}$ možností, ako vybrať dvoch futbalistov, ktorí dajú najviac 3 góly. Pre každé rozdelenie do skupín je počet výsledkoviek rovnaký, preto počet všetkých výsledkoviek je:

$$\binom{10}{6}\binom{4}{2}\left(\binom{16+10-1}{16} - M\right)$$

□

Úloha 2. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1,\dots,n\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) neobsahujú súvislú podpostupnosť $(i, i+1)$ pre $i \in \{1,\dots,(n-1)\}$? Výsledok môže obsahovať najviac jednu sumu.

Riešenie. Výsledok spočítame tak, že od počtu všetkých permutácií ($n!$) odpočítame počet všetkch permutácií, ktoré obsahujú aspoň jednu dvojicu $(i, i+1)$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Označme si M_i množinu permutácií, ktoré obsahujú podpostupnoť $(i, i+1)$, pre $i \in \{1,\dots,(n-1)\}$. Na výpočet počtu zlých permutácií použijeme princíp zapojenia a vypojenia:

Označme M množinu zlých permutácií. Potom

$$|M| = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \in \mathbb{N} \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n-1}} \left| \bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j} \right|.$$

Ako spočítame $|M_i|$? Vieme, že sa tam niekde nachádza dvojica $(i, i+1)$ a na poradí ostatných prvkov ani polohe dvojice $(i, i+1)$ nezáleží. Preto $(i, i+1)$ môžeme brať ako jeden prvok, ktorý sa dá ľubovoľne permutovať s ostatnými. Z toho dostávame, že pre každé $i \in \{1,\dots,n-1\}$ platí:

$$|M_i| = (n-1)!$$

Skúsme sa pozrieť na $|M_i \cap M_j|$. Tu sú dve možnosti.

- Dvojice $(i, i+1)$ a $(j, j+1)$ sa prekrúvajú: Máme znak zložený z troch číslic za sebou a $n-3$ jednoduchých znakov (samostatných číslic) $\Rightarrow |M_i \cap M_j| = (n-2)!$
- Dvojice $(i, i+1)$ a $(j, j+1)$ sa neprekrúvajú: Máme dva znaky zložené z dvoch čísel a $n-4$ jednoduchých znakov. $\Rightarrow |M_i \cap M_j| = (n-2)!$

Zdá sa, že na počte prekrývajúcich sa dvojíc nezáleží. Stačí si uvedomiť, že každé číslo, ktoré je v prieniku dvoch dvojíc $(i, i+1)$ a $(j, j+1)$ zmenší počet zložených znakov o 1 a zároveň zvýši počet jednoduchých znakov o 1.

Poďme to overiť formálne. Nech je v permutícií k dvojíc (i_j, i_j+1) pre $j \in \{1,\dots,k\}$ a p prvkov sa v nich opakuje. Počet jednoduchých znakov J, vieme vypočítať ako

$$J = n - (2k - p).$$

Stačí si uvedomiť, že $2k - p$ je počet číslic, ktoré sú pokryté nejakou dvojicou. Číslo p sme museli odpočítať, aby sme započítali opakujúce sa čísla iba raz.

Pomocou tých istých čísel (k a p) vieme vypočítať aj počet zložených znakov Z:

$$Z = k - p,$$

lebo každý prienik zmenší počet zložených znakov o 1.

Spolu teda môže permutovať $J + Z = n - 2k + p + k - p = n - k$ znakov. Z toho vidíme, že $\left|\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j}\right| = (n-k)!$ a nezáleží na počte prekryvov. Dosadíme do sumy:

$$|M| = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \in \mathbb{N} \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n-1}} (n-k)!$$

Vo vnútornej sume vidíme, že neobsahuje žiadnu z premenných i_j. Počet sčítancov tejto sumy je presne rovný počtu kombinácií bez opakovania k prvkov z $n-1$. Preto sčítame $\binom{n-1}{k}$-krát $(n-k)!$. Dostávame výsledok:

$$|M| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} (n-k)!$$

Celkový počet permutácií n prvkov, ktoré neosahujú žiadnu dvojicu typu $(i, i+1)$ je

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} (n-k)!$$

□