Úlohy k cvičeniu č. 2

Dirichletov princíp vo svojej základnej verzii vyjadruje jednoduché pozorovanie, že po priradení n objektov do $m < n$ priečinkov bude aspoň jeden priečinok obsahovať aspoň dva objekty. Ak teda napríklad n holubov používa $m < n$ holubníkových dier, tak aspoň jednu z dier musia používať najmenej dva holuby (preto je niekedy reč aj o *holubníkovom princípe*, angl. *Pigeonhole principle*).

Priradenie n objektov do m priečinkov možno sformalizovať ako zobrazenie $f : A \to B$ medzi konečnými množinami A a B takými, že $|A| = n$ a $|B| = m$. Základná verzia Dirichletovho princípu potom hovorí, že ak $m < n$, tak takéto zobrazenie nemôže byť injektívne.

Veta 1 (Dirichletov princíp)**.** *Nech A a B sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = m$ a $n > m$. Potom neexistuje žiadne injektívne zobrazenie $f\colon A \to B$.*

1. Majme 101 (nie nutne rôznych) trojciferných prirodzených čísel. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dve, ktoré sa zhodujú v posledných dvoch cifrách (dekadického zápisu).

2. Predpokladajme, že Bratislava má 419678 obyvateľov, z ktorých žiaden nemá viac ako 1000 rokov. Dokážte, že aspoň dvaja Bratislavčania sa narodili v rovnaký deň rovnakého roku.

3. Majme 2017 (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu čísel a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i - a_j \equiv 0 \pmod{2016}$.

4. Majme $n+1$ (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, kde $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i - a_j \equiv 0 \pmod{n}$.

5. Majme 52 prirodzených čísel $a_1, \ldots, a_{52}$, ktorých zvyšky po delení číslom 100 sú po dvoch rôzne. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i + a_j \equiv 0 \pmod{100}$.

6. Majme 52 (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, \ldots, a_{52}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i + a_j \equiv 0 \pmod{100}$ alebo $a_i - a_j \equiv 0 \pmod{100}$.

7. Nech $(a_1, \ldots, a_n)$ je konečná postupnosť prirodzených čísel. Dokážte, že z nej možno vybrať neprázdnu *súvislú* podpostupnosť $(a_{i+1}, \ldots, a_j)$ $(i < j)$ tak, aby bol súčet $a_{i+1} + \ldots + a_j$ členov tejto podpostupnosti deliteľný číslom n.

8. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Z množiny $\{1, \ldots, 2n\}$ vyberme ľubovoľných $n+1$ (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, ktoré majú rozdiel 1.

9. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Z množiny $\{1, \ldots, 2n\}$ vyberme ľubovoľných $n+1$ (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, z ktorých jedno delí to druhé.

10. Majme $2^{n-4}+1$ n-bitových binárnych vektorov (teda postupností núl a jednotiek). Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dva, ktoré sa líšia v najviac štyroch bitoch.

11. Vo vnútri rovnostranného trojuholníka o strane dĺžky 2 sa nachádza päť bodov. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu bodov, ktoré sú od seba vo vzdialenosti nanajvýš 1.

12. Vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu, no najviac tri ovce. Medveď zje každý deň aspoň štyri ovce, no najviac sedem oviec. Dokážte, že v každom týždni existujú dva dni, keď bača utrpí rovnakú škodu.

13. Počas deviatich kalendárnych týždňov zje vlk každý deň aspoň jednu ovcu, no v každom z deviatich kalendárnych týždňov zje najviac 12 oviec. Dokážte, že existuje úsek po sebe idúcich dní, počas ktorého zje vlk presne 15 oviec.

Predmetom nasledujúcich cvičení sú určité kombinatorické konfigurácie, ku ktorým možno jednoznačne priradiť ich rád (prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$). Konfiguráciou rádu n môže byť napríklad postupnosť n hodov niekoľkými hracími kockami alebo umiestnenie n figúrok na šachovnicu.

Nasledujúce zadania navyše majú vlastnosť, že istá situácia v nich nutne nastáva pre všetky konfigurácie rádu $n \geq n_0$, kým pre konfigurácie rádu $n < n_0$ táto situácia v aspoň jednom prípade nenastáva (zo zadania je väčšinou ľahko vidieť, že takáto „prahová hodnota" n_0 skutočne existuje). Úlohou je zakaždým nájsť *najmenšie* n také, že daná situácia nastáva pre všetky konfigurácie rádu n (hodnotu n_0), prípadne *najväčšie* n také, že daná situácia ešte pre niektorú konfiguráciu rádu n nenastáva ($n_0 - 1$).

Dôkaz, že hodnota $x \in \mathbb{N}$ je skutočne hľadaným n_0 (resp. $n_0 - 1$) pozostáva z dvoch častí:

(i) Treba dokázať, že $x \leq n_0$ (resp. $x \leq n_0 - 1$) a x je tak dolným odhadom n_0 (resp. $n_0 - 1$): pre $x - 1$ (resp. pre x) ešte daná situácia v aspoň jednej konfigurácii nenastáva.

(ii) Treba tiež dokázať, že $x \geq n_0$ (resp. $x \geq n_0 - 1$) a x je tak horným odhadom n_0 (resp. $n_0 - 1$): pre x (resp. pre $x + 1$) musí daná situácia nutne nastať vo všetkých konfiguráciách.

Dôkaz nerovnosti (i) je väčšinou pomerne jednoduchý, keďže stačí prísť s konkrétnym príkladom konfigurácie rádu $x - 1$ (resp. x), pre ktorú daná situácia nenastáva. Na dôkaz nerovnosti (ii) je zvyčajne potrebné využiť Dirichletov princíp.

V šachových úlohách budeme hovoriť, že dve figúrky sa ohrozujú práve vtedy, keď jedna z nich vie urobiť ťah na pozíciu obsadenú druhou z nich. Môžu sa teda ohrozovať aj dve figúrky rovnakej farby.

14. Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

15. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

16. Koľko najviac veží možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?

17. Koľko najviac koňov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

18. Koľko najviac strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

19. Koľko najviac bielych pešiakov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali (za predpokladu, že biely pešiak môže stáť aj v ôsmom rade)?

20. *Špecializovaný strelec-expert* je šachová figúrka, ktorá sa môže hýbať iba po diagonálach rovnobežných s diagonálou `a1-h8`. Prípustné sú teda práve všetky ťahy po diagonále v smere „doprava hore" alebo „doľava dole". Koľko najviac špecializovaných strelcov-expertov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

21. *Prehnane iniciatívny strelec* je šachová figúrka, ktorej jeden ťah pozostáva z ľubovoľného nenulového počtu ťahov bežného strelca. Koľko najviac prehnane iniciatívnych strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Veta 2 (Frekvenčná forma Dirichletovho princípu)**.** *Nech A a B sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = m \geq 1$ a $n/m > r - 1$ pre nejaké $r \in \mathbb{N}$. Potom pre ľubovoľné zobrazenie $f\colon A \to B$ existuje prvok $b \in B$ taký, že $f(a) = b$ pre aspoň r rôznych prvkov $a \in A$.*

22. Dokážte, že pri devätnástich hodoch hracou kockou musí aspoň štyrikrát padnúť rovnaké číslo.

23. Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

24. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

25. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia 33 veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať päť veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali.

26. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia $k \in \{0, 1, \ldots, 64\}$ veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať $\lceil k/8 \rceil$ veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali.

27. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia deviatich strelcov na (štandardnej) šachovnici možno vybrať dvoch strelcov tak, aby sa neohrozovali. Nájdite vhodné zovšeobecnenie tohto tvrdenia pre $k \in \{0, 1, \ldots, 64\}$ strelcov.