

Úlohy k cvičeniu č. 10

Definícia 1. Graf je trojica $G = (V, E, I)$, kde V je neprázdna konečná množina, E je konečná množina, $V \cap E = \emptyset$ a

$$I: E \rightarrow \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$$

je zobrazenie. Prvky množiny V nazývame *vrcholmi*, prvky množiny E nazývame *hranami* a zobrazenie I nazývame *incidenčnou funkciou*.

Ak v grafe $G = (V, E, I)$ pre nejaké (nie nutne rôzne) vrcholy $u, v \in V$ a hranu $e \in E$ platí $I(e) = \{u, v\}$, hovoríme, že *hrana e je incidentná s vrcholmi u a v* . Hrana $e \in E$, pre ktorú existuje vrchol $v \in V$ taký, že $I(e) = \{v\}$, sa nazýva *slučka vo vrchole v* . Ak pre dvojicu rôznych hrán $e, f \in E$ existuje dvojica vrcholov $u, v \in V$ tak, že $I(e) = I(f) = \{u, v\}$, hovoríme, že e a f sú *paralelné hrany*. Pod *rádom grafu* rozumieme počet prvkov množiny V .

Definícia 2. *Jednoduchý graf* je graf $G = (V, E, I)$, ktorý neobsahuje žiadne slučky ani paralelné hrany – jeho incidenčná funkcia I je teda injektívnym zobrazením E do $\binom{V}{2}$.

Poznámka 1. Jednoduché grafy možno alternatívne definovať aj ako dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdna konečná množina a $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Uvedená terminológia nie je úplne ustálená a môže sa od zdroja k zdroju líšiť. Pod pojmom „graf“ sa napríklad často rozumie iba jednoduchý graf; objekty z definície 1 sa potom nazývajú „multigrafy“. Iné zdroje zas v definícii jednoduchého grafu povoľujú slučky a o objektoch z definície 2 hovoria ako o „jednoduchých grafoch bez slučiek“. V súvislosti s orientovanými grafmi sa grafy v zmysle definície 1 nazývajú aj *neorientované grafy*.

Definícia 3. Nech $G = (V, E, I)$ a $G' = (V', E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že grafy G a G' sú *izomorfné*, ak existujú *bijektívne* zobrazenia $\varphi: V \rightarrow V'$ a $\psi: E \rightarrow E'$ také, že pre všetky hrany $e \in E$ platí: ak $I(e) = \{u, v\}$, tak $I'(\psi(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}$. Dvojicu zobrazení (φ, ψ) nazývame *izomorfizmom* a pre izomorfné grafy G a G' píšeme $G \simeq G'$.

Poznámka 2. Relácia \simeq je očividne reláciou ekvivalencie.

Poznámka 3. Obvykle sa pre zobrazenia φ a ψ z definície 3 používa rovnaký symbol, napríklad φ . Izomorfizmus potom možno chápať ako zobrazenie $\varphi: V \cup E \rightarrow V' \cup E'$.

Definícia 4. Nech $G = (V, E, I)$ a $G' = (V, E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že graf G' vznikne *premenovaním hrán* grafu G , ak existuje *bijektívne* zobrazenie $\chi: E \rightarrow E'$ také, že pre všetky $e \in E$ platí $I'(\chi(e)) = I(e)$. Takéto grafy G a G' zvyčajne stotožňujeme a píšeme $G = G'$.

Nech \mathcal{G} je ľubovoľná trieda grafov. Pod *počtom neoznačených grafov* rádu n z triedy \mathcal{G} budeme rozumieť počet tried ekvivalencie relácie \simeq zúženej na grafy rádu n z triedy \mathcal{G} – izomorfné grafy teda budeme pokladať za totožné. Pod *počtom označených grafov* z triedy \mathcal{G} na pevne danej množine vrcholov V s $|V| = n$ budeme rozumieť počet grafov $G = (V, E, I)$ z triedy \mathcal{G} , po stotožnení z definície 4. Ak v nasledujúcich úlohách budeme hovoriť o „počte grafov“, vždy budeme mať na mysli „počet označených grafov“.

1. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \dots, n\}$.
2. Nech $n, k \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \dots, n\}$, ktoré majú práve k hrán.
3. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých grafov na $V = \{1, \dots, n\}$, ktoré neobsahujú žiadne paralelné hrany.
4. Nech $n, s \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých grafov na $V = \{1, \dots, n\}$ takých, že medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi môže viesť najviac s paralelných hrán.

Definícia 5. Nech $G = (V, E, I)$ a $H = (V', E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že graf H je *podgrafom* grafu G , ak $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a incidenčná funkcia I' je zúžením I na E' . V takom prípade píšeme $H \subseteq G$.

Definícia 6. Nech $G = (V, E, I)$ a $H = (V', E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že graf H je *indukovaným podgrafom* grafu G , ak H je podgrafom G a pre všetky $e \in E$ také, že $I(e) \subseteq V'$ platí $e \in E'$. V takom prípade píšeme $H = G[V']$.

Definícia 7. Nech $G = (V, E, I)$ a $H = (V', E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že graf H je *faktorom* grafu G , ak H je podgrafom G a $V' = V$.

Definícia 8. Nech $n \geq 1$. *Kompletný graf* o n vrcholoch je jednoduchý graf $K_n = (V_n, E_n, I_n)$, kde $V_n = \{1, \dots, n\}$, $E_n = \binom{V_n}{2}$ a pre všetky hrany $e \in E_n$ platí $I_n(e) = e$.

5. Nech $n \geq 1$. Nájdite počet všetkých podgrafov kompletného grafu K_n .
6. Nech $n \geq 1$. Nájdite počet všetkých indukovaných podgrafov kompletného grafu K_n .
7. Nech $n \geq 1$. Nájdite počet všetkých faktorov kompletného grafu K_n . Výsledok môže obsahovať sumu.

Definícia 9. Nech $G = (V, E, I)$ je graf a $v \in V$ je jeho vrchol. *Stupeň vrchola* v je číslo

$$\deg_G(v) = |\{e \in E \mid v \in I(e)\}| + |\{e \in E \mid I(e) = \{v\}\}|.$$

Stupeň vrchola v teda udáva počet hrán incidentných s vrcholom v , pričom slučky sa započítavajú dvakrát (raz spolu s ostatnými hranami a raz osobitne). To zodpovedá predstave o stupni vrchola ako o súčtu počtov „vychádzajúcich“ a „vchádzajúcich“ hrán; slučka pritom z vrchola v „vychádza“, aj do neho „vchádza“.

Definícia 10. Nech $G = (V, E, I)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Graf G je *k -regulárny*, ak pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) = k$. Graf G je *regulárny*, ak je k -regulárny pre nejaké k .

8. Dokážte, že v každom jednoduchom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú aspoň dva vrcholy s rovnakým stupňom.
9. Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k -regulárny graf rádu n .
10. Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k -regulárny jednoduchý graf rádu n .
11. Nájdite všetky 3-regulárne grafy rádu 6.
12. Pre každé z nasledujúcich tvrdení dokážte alebo vyvráťte jeho platnosť pre všetky $n \geq 1$:
 - a) Kompletný graf K_n je regulárny.
 - b) Každý podgraf grafu K_n je regulárny.
 - c) Každý indukovaný podgraf grafu K_n je regulárny.
 - d) Každý faktor grafu K_n je regulárny.
13. Dokážte alebo vyvráťte: každý indukovaný podgraf regulárneho grafu je regulárny.

Definícia 11. Nech $G = (V, E, I)$ je graf a $u, v \in V$ sú jeho vrcholy. Pod *u - v -sledom* v grafe G rozumieme konečnú postupnosť $W = (u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n)$ takú, že:

- (i) Pre $i = 0, \dots, n$ platí $u_i \in V$.
- (ii) Pre $i = 1, \dots, n$ platí $e_i \in E$.
- (iii) Platí $u_0 = u$ a $u_n = v$.
- (iv) Pre $i = 1, \dots, n$ platí $I(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Pod *sledom* rozumieme u - v -sled pre ľubovoľné $u, v \in V$. Pod *uzavretým sledom* rozumieme u - u -sled pre ľubovoľné $u \in V$. Pod *tahom* rozumieme sled, ktorého hrany sú po dvoch rôzne. Pod *cestou* rozumieme sled, ktorého vrcholy sú po dvoch rôzne. Pod *kružnicou* rozumieme uzavretý sled $W = (u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_0)$ taký, že $n \geq 1$ a vrcholy u_0, \dots, u_{n-1} aj hrany e_1, \dots, e_n sú po dvoch rôzne. Pod *dĺžkou* u - v -sledu $W = (u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n)$ rozumieme číslo n .

Definícia 12. Nech $G = (V, E, I)$ je graf. Hovoríme, že graf G je *súvislý*, ak pre každé $u, v \in V$ existuje v G aspoň jeden u - v -sled.

14. Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?
15. Nech $G = (V, E, I)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:
 - a) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u - v -sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v .
 - b) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u , tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u .
16. Dokážte, že ak graf $G = (V, E, I)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.
17. Nech $G = (V, E, I)$ je graf taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq 2$. Dokážte, že graf G musí nutne obsahovať kružnicu.
18. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.
19. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.
20. Dokážte, že každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$ a kružnicu dĺžky aspoň $\delta(G) + 1$ (pre $\delta(G) \geq 2$), kde $\delta(G)$ je najmenší stupeň grafu.
21. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.
22. Nech $G = (V, E, I)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n - 1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.
23. Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý.

Definícia 13. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a $u, v \in V$ sú jeho vrcholy. Pod *vzdialenosťou* vrcholov u a v v grafe G rozumieme dĺžku najkratšieho u - v -sledu. Vzďialenosť vrcholov u a v označujeme symbolom $\text{dist}_G(u, v)$.

Definícia 14. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Priemer* grafu G je číslo

$$\text{diam}(G) = \max\{\text{dist}_G(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Definícia 15. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a $v \in V$ je jeho vrchol. *Excentricita* vrcholu v je číslo

$$\text{ex}_G(v) = \max\{\text{dist}_G(u, v) \mid u \in V\}.$$

Definícia 16. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Polomer* grafu G je číslo

$$\text{rad}(G) = \min\{\text{ex}_G(v) \mid v \in V\}.$$

Definícia 17. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Centrum* grafu G je množina vrcholov

$$\text{cent}(G) = \{v \in V \mid \text{ex}_G(v) = \text{rad}(G)\}.$$

24. Nech $G = (V, E, I)$ je ľubovoľný súvislý graf. Dokážte, že $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G)$.