Riešenia prvej sady domácich úloh

Anna Kompišová

20. marca 2019

Úloha 1.

Uvažujme zobrazenie $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dané predpisom:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 2, \\ f(n+1,k) &= f(n,k) + 2(n+k+2), \qquad \forall n,k \in \mathbb{N}, \\ f(n,k+1) &= f(n,k) + 2(n+k+1), \qquad \forall n,k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre všetky $n,k \in \mathbb{N}$ platí

$$f(n,k) = (n+k+2)^2 - n - 3k - 2.$$

Riešenie. Označme $g(n,k) = (n+k+2)^2 - n - 3k - 2$. Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že $f(n,k) = g(n,k)$.

- Báza indukcie pozostáva z dokázania, že $f(0,k) = g(0,k)$. Bázu dokážeme indukciou vzhľadom na k.
  - Nech $k = 0$. Potom podľa predpisu fukcie $g(0,0) = (0+0+2)^2 - 0 - 3\cdot 0 - 2 = 2 = f(0,0)$. Teda tvrdenie platí,
  - Predpokladajme, že platí $f(0,k_0) = g(0,k_0)$, pre $k_0 \leq k$. Potom

$$\begin{aligned} f(0,k+1) &= f(0,k) + 2(k+1) = \\ &= (k+2)^2 - 3k - 2 + 2(k+1) = \qquad \text{(indukčný predpoklad)} \\ &= k^2 + 4k + 4 - 3k - 2 + 2k + 2 = \\ &= k^2 + 6k + 9 - 3k - 3 - 2 = \\ &= (k+3)^2 - 3(k+1) - 2 = g(0,k+1) \end{aligned}$$

- Indukčný krok. Predpokladajme, že $f(n_0,k) = g(n_0,k)$ pre všetky $n_0 \leq n$ a $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned} f(n+1,k) &= f(n,k) + 2(n+k+2) = \\ &= (n+k+2)^2 - n - 3k - 2 + 2(n+k+2) = \qquad \text{(indukčný predpoklad)} \\ &= n^2 + 2nk + k^2 + 4n + 4k + 4 - n - 3k - 2 + 2n + 2k + 4 = \\ &= n^2 + 2nk + k^2 + 6n + 6k + 9 - n - 1 - 3k - 2 = \\ &= (n+k+3)^2 - (n+1) - 3k - 2 = g(n+1,k) \end{aligned}$$

□

Úloha 2. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje prirodzené číslo, ktoré je násobkom čísla n a jeho dekadický zápis obsahuje len cifry 0 a 1.

Riešenie.

Zvoľme množinu $X = \{a_1, a_2, \dots a_{n+1}\}$ tak, že $a_i = \underbrace{11\dots1}_{i\text{-krát}}$. Označme $Y = \{0, 1, \dots, (n-1)\}$ množinu zvyškových tried po delení číslom n. Nech $f\colon X \to Y$ je funkcia daná nasledovne:

$$f(a_i) = y, \quad \text{ak } a_i = k \cdot n + y, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}, y \in Y$$

.

Keďže $|Y| < |X|$, z Dirichletovho princípu vyplýva, že f nemôže byť injektívna, preto existujú a_i a a_j také, že $i > j$ a $f(a_i) = f(a_j)$. Zjavne $a_i - a_j$ je hľadaný násobok, lebo

$$a_i - a_j = k \cdot n + y - (\ell \cdot n + y) = (k - \ell) \cdot n = \underbrace{11\dots1}_{(i-j)\text{-krát}}\,\underbrace{00\dots0}_{j\text{-krát}}.$$

□