Riešenia druhej sady domácich úloh

Anna Kompišová

10. apríla 2019

Úloha 1. Záhradný architekt navrhol stromovú alej tvorenú dvomi radmi stromov. V každom rade má byť presne $2n$ stromov. Záhradníci majú k dispozícii nasledovné druhy: lipa, javor, smrek a jedľa. Z každého druhu máju nekonečne veľa kusov. Záhradný architekt nechal záhradníkom nasledovné inštrukcie:

- Oproti sebe musia byť zasadené dva listnaté alebo dva ihličnaté stromy.
- V jednom rade vedľa seba nesmú byť posadené dva ihličnaté stromy.
- Presne polovica zo všetkých listnatých stromov musia byť lipy.

Koľkými rôznymi spôsobmi môžu záhradníci vysadiť alej, ak chcú dodržať všetky inštrukcie od záhradného architekta? Výsledok môžete uviesť v tvare sumy.

Riešenie. Rozdelíme si riešenie na prípady podľa počtu ihličnatých stromov. V jednom rade môže byť od nula po n ihličnatých stromov. Ak by sme do jedného radu chceli umiestniť $n+1$ ihličnatých stromov, tak by podľa Dirichletovho princípu museli byť dva vedľa seba a to nechceme. V druhom rade musia byť umiestnené ihličnaté stromy na rovnakých miestach ako v prvom, aby bola splnená podmienka, že oproti sebe sú dva ihličnaté alebo dva listnaté stromy.

Rozoberme teraz prípad, keď v jednom rade je k ihličnatých stromov. To znamená, že ostatných $(2n-k)$ stromov v tomto rade, je listnatých. Predpokladajme, že máme nejako posadené listnaté stromy a chceme medzi ne posadiť ihličnaté. Keďže v každej medzere medzi dvoma listnatými stromami môže byť najviac jeden ihličnatý, tak máme presne $(2n-k+1)$ miest, kam môžeme posadiť ihličnaté stromy (počítame, že ihličnatý strom môže byť prvý a aj posledný v rade). Ak vyberieme podmnožinu veľkosti k spomedzi týchto $(2n-k+1)$ miest, tak dostaneme jedno konkrétne prípustné rozmiestnenie stromov v rade. Naopak každé prípustné rozmiestnenie vieme získať takýmto spôsobom. Preto počet možností v akom poradí môže byť posadených k ihličnatých a $2n-k$ listnatých stromov je $\binom{2n-k+1}{k}$.

Predpokladajme, že máme presne určené, kde majú byť posadené listnaté a ihličnaté stromy. Listnatých stromov je celkovo $2 \times (2n-k) = 4n-2k$. Vieme, že presne polovica sú lipy. Počet spôsobov ako vybrať z $(4n-2k)$ presne polovicu, t.j. $(2n-k)$, miest pre lipy je $\binom{4n-2k}{2n-k}$.

Nezávisle od listnatých stromov, na každé miesto určené pre ihličnatý strom môžeme zasadiť buď smrek alebo jedľu. Pre každé miesto teda máme dve možnosti. Celkovo máme teda 2^{2k} možností, ako posadiť ihličnaté stromy.

Ked to spojíme, pre k ihličnatých stromov v jednom rade máme nasledovný počet možností ako vysadiť alej:

$$\binom{2n-k+1}{k}\binom{4n-2k}{2n-k}2^{2k}.$$

Keďže k môže byť hocičo medzi nulou a n, celkový výsledok je

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k+1}{k}\binom{4n-2k}{2n-k}2^{2k}.$$

$\square$

Úloha 2. Vypočítajte pre $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$:

$$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{k}{2}(n-k)$$

Riešenie. Asi najjednoduchší spôsob je upraviť algeobraicky túto sumu na niečo, čo sa bude podobať binomickej vete a následne ju použiť.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{k}{2}(n-k) &= \sum_{k=2}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{2!(k-2)!}(n-k) & (1)\\
&= \sum_{k=2}^{n-1}\frac{n!}{2!(n-k-1)!(k-2)!} & (2)\\
&= \sum_{k=2}^{n-1}\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}\frac{(n-3)!}{(n-k-1)!(k-2)!} & (3)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}\sum_{\ell=0}^{n-3}\frac{(n-3)!}{(n-3-\ell)!\ell!} & (4)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}\sum_{\ell=0}^{n-3}\binom{n-3}{\ell} & (5)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}2^{n-3} & (6)
\end{aligned}
$$

Vysvetlivky: V kroku (1) sme prepísali kombinačné čísla pomocou faktoriálov. V kroku (2) sme pokrátili všetko, čo sa dalo. V kroku (3) sme si sumu upravili tak, aby faktoriály znovu tvorili kombinačné číslo. V kroku (4) sme nahradili $k-2=\ell$. V kroku (5) sme sčítance sumy znovu prepísali ako kombinačné čísla. V poslednom ktoru sme použili binomickú vetu: $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k$, kde $x=1$ a $m=n-3$.

Ďalší spôsob riešenia by mohol byť kombinatorickou interpretáciou. Môžeme si všimnúť, že suma vyjadruje počet konfigurácií (A,B,C,D), kde A,B,C,D sú množiny, ktoré spĺňajú nasledovné podmienky:

- $|A|=n$
- $B\subseteq A,\quad C\subseteq A,\quad D\subseteq A$
- $C\subseteq B,\quad D\subseteq A-B$
- $|C|=2,\quad |D|=1.$

Jednotlivé sčítance sumy vyjadrujú počet takýchto konfigurácií vzhľadom na $|B|=k$. Najprv sa vyberie podmnožina B veľkosti k, potom sa z tejto podmnožiny vyberie podmnožina C veľkosti 2 a zo zvyšku $A-B$, pričom $|A-B|=n-k$, sa vyberie jeden prvok, ktorý tvorí podmnožinu D.

Takéto konfigurácie vieme počítať aj iným spôsobom. Najskôr vyberieme podmnožinu C ($\binom{n}{2}$ možností), potom zo zvyšku vyberieme prvok, ktorý tvorí množinu D ($(n-2)$ možností) a následne o každom zvyšnom prvku môžeme rozhodnút, či bude patriť do podmnožiny B alebo nie (2^{n-3} možností). Spolu dostávame výsledok:

$$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{k}{2}(n-k)=\binom{n}{2}(n-2)2^{n-3}.$$

□