Riešenia druhej sady domácich úloh

Anna Kompišová

21. mája 2019

Úloha 1. Dokážte, že ak T a R sú kostry n-vrcholového grafu G, tak existuje postupnosť kostier,

$$T = T_0, T_1, T_2, \ldots, T_k = R,$$

kde kostry T_i a T_{i+1} majú $n-2$ spoločných hrán, pre $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Riešenie. Postupnosť kostier vyrobíme nasledovným postupom:

- Zvoľme $T = T_0$.
- Ak $T_i = R$, tak skončíme.
- Ak $T_i \neq R$, tak existuje hrana $e = (u, v)$, ktorá patrí do kostry R ale nepatrí do kostry T_i. Nech P je cestra spájajúca vrcholy u a v v kostre T_i. Cesta P a hrana e tvoria kružnicu grafu G. Z toho vyplýva, že na tejto kružnici existuje hrana e', ktorá nepatrí do kostry R. Novú kostru T_{i+1} vytvoríme tak, že ku kostre T_i pridáme hranu e a odstránime hranu e'.

Ak T_i bola kostra, potom sme v nej pridaním hrany e vytvorili kužnicu. Túto kružnicu sme následne odstránili odstránením hrany e'. Hrana e' nemohla byť most, keďže ležala na kružnici. Preto výsledný graf T_{i+1} je tiež kostrou grafu G. Kostry T_i aT_{i+1} sa líšia len v hranách e a e', preto majú presne $n-2$ spoločných hrán. Zároveň kostra T_{i+1} má viac spoločných hrán s kostrou R ako kostra T_i. Preto takýto proces vytvárania postupnosti kostier musí vždy skončiť. Každá kostra konečného grafu má totiž len konečný počet hrán. Nami definovaná postupnosť kostier preto spĺňa podmienky zo zadania. □