

## Domáce úlohy

1. Pre všetky  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  existuje presne  $C_{n-1}$  usporiadaných zakorenených stromov o  $n$  vrchoch a presne  $C_n$  binárnych stromov o  $n$  vrchoch. Pritom ale  $C_{n-1} < C_n$ . Vysvetlite túto zdanlivo paradoxnú skutočnosť.
2. a) Nájdite všetky kombinatorické triedy neoznačených objektov  $\mathcal{C}$  také, že obyčajná vytvárajúca funkcia  $C(z) \in \mathbb{N}[[z]]$  triedy  $\mathcal{C}$  má nekonečný polomer konvergenie – možno ju teda interpretovať aj ako celú funkciu  $C(z) \in \mathbf{H}_0$ .  
b) Zostane táto charakterizácia v platnosti aj v prípade, že  $\mathcal{C}$  interpretujeme ako kombinatorické triedy označených objektov a pýtame sa, či má nekonečný polomer konvergenie exponenciálna vytvárajúca funkcia tejto triedy?
3. Nech  $\Sigma$  je abeceda. Nájdite najmenší a najväčší možný polomer konvergenie  $\varrho$  obyčajnej vytvárajúcej funkcie kombinatorickej triedy  $\mathcal{W}_L$  pozostávajúcej zo všetkých slov v nejakom jazyku  $L \subseteq \Sigma^*$  s veľkosťou danou dĺžkou slova. Ako sa zmení odpoveď, keď budeme navyše predpokladať nekonečnosť jazyka  $L$ ?
4. Dokážte tvrdenie z poznámky 6.2.6 zo skrípt.
5. S použitím metódy analýzy singularít asymptoticky odhadnite koeficienty Maclaurinovho radu funkcie
$$f(z) = e^{1 - \sqrt[3]{1-3z}}.$$
6. Pre  $n \rightarrow \infty$  asymptoticky odhadnite počet všetkých binárnych vyhľadávacích stromov s kľúčmi  $1, \dots, n$  (pričom každý z nich sa v strome vyskytuje práve raz).
7. Pre pevné  $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  a  $n \rightarrow \infty$  asymptoticky odhadnite počet všetkých permutácií množiny  $[n]$ , ktorých rozklad na disjunktné cykly obsahuje práve  $r$  cyklov párnej dĺžky (a ľubovoľný počet cyklov nepárnej dĺžky).
8. Nájdite hodnotu, ku ktorej sa pre  $n \rightarrow \infty$  limitne blíži pravdepodobnosť, že rovnomerne náhodne zvolená permutácia množiny  $[n]$  neobsahuje žiaden cyklus dĺžky 3 ani 4.
9. Bezkontextová gramatika  $G = (N, T, P, \sigma)$  je *lineárna*, ak  $P \subseteq N \times (T^*NT^* \cup T^*)$ . Dokážte, že obyčajná vytvárajúca funkcia kombinatorickej triedy všetkých slov generovaných jednoznačnou lineárnou gramatikou je vždy racionálna.
10. Pre  $n \rightarrow \infty$  odhadnite očakávaný počet unárnych vrcholov v rovnomerne náhodne vybranom unárno-binárnom strome o  $n$  vrchoch.
11. Pre  $n \rightarrow \infty$  odhadnite očakávaný počet komponentov súvislosti rovnomerne náhodne vybraného 2-regulárneho (neorientovaného) grafu o  $n$  označených vrchoch.
12. Pre  $n \rightarrow \infty$  odhadnite očakávaný počet klauzúl v rovnomerne náhodne vybranej výrokovovej formule v konjunktívnom normálnom tvare o  $n$  literáloch.