Prvá sada domácich úloh

1. Dokážte alebo vyvráťte: pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ so stredom v bode 0 a s polomerom konvergencie 1, ktorý diverguje *v práve k rôznych bodoch* kružnice $|z| = 1$ (a vo zvyšných bodoch tejto kružnice konverguje). (Úloha 3.2 zo skrípt.)

2. Dokážte, že na *kompaktnej* množine postupnosť funkcií konverguje rovnomerne práve vtedy, keď konverguje lokálne rovnomerne. (Úloha 7.1 zo skrípt.)

3. Dokážte, že vo vete 7.1.8 v skutočnosti možno predpoklad rovnomernej konvergencie nahradiť slabším predpokladom lokálne rovnomernej konvergencie. (Úloha 7.2 zo skrípt.)

4. Dokážte alebo vyvráťte: ak $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ je holomorfná na $D(0,1)$, pričom ± 1 a $\pm i$ sú hromadnými bodmi $Z(f)$, je funkcia f na $D(0,1)$ nutne konštantne nulová. (Úloha 8.2 zo skrípt.)

5. Nech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkcia. Dokážte, že ak $f(z) \in \mathbb{R}$ pre všetky $z \in \mathbb{C}$ také, že $|z| = 1$, je funkcia f nutne konštantná. (Úloha 8.3 zo skrípt.)

6. Nech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkcia. Dokážte, že ak $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$, je funkcia f nutne konštantná. (Úloha 8.4 zo skrípt.)

7. Nech f je funkcia meromorfná na $\mathbb{C}$, ktorá je na prstencovom okolí $D'(0,1)$ daná Laurentovým rozvojom s konečným počtom členov: pre všetky $z \in D'(0,1)$ je teda

$$f(z) = \sum_{n=m}^{M} a_n z^n,$$

kde $m, M \in \mathbb{Z}$ a pre $n = m, \ldots, M$ je $a_n \in \mathbb{C}$. Nájdite všetky možné počty pólov funkcie f v $\mathbb{C}$. (Úloha 9.12 zo skrípt.)