Prvá sada domácich úloh

1. Zistite, či existuje funkcia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ktorá:

   a) Nie je spojitá v žiadnom bode $a \in \mathbb{C}$.

   b) Nie je spojitá v žiadnom bode $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale v bode $a = 0$ je dokonca diferencovateľná.

   V prípade kladnej odpovede príslušnú funkciu nájdite a dokážte, že skutočne má danú vlastnosť. V prípade zápornej odpovede svoje tvrdenie dokážte. (Úloha 2.11 zo skrípt.)

2. Dokážte alebo vyvráťte: pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ so stredom v bode 0 a s polomerom konvergencie 1, ktorý diverguje *v práve k rôznych bodoch* kružnice $|z| = 1$ (a vo zvyšných bodoch tejto kružnice konverguje). (Úloha 3.2 zo skrípt.)

3. Dokážte, že každá uzavretá krivka γ s $\gamma^* \subseteq D'(0,1)$ je homotopická v $D'(0,1)$ s krivkou $\hat{\gamma}$ takou, že $\hat{\gamma}^* \subseteq \kappa(0,1/2)^*$. (Úloha 5.3 zo skrípt.)

4. Dokážte, že na *kompaktnej* množine postupnosť funkcií konverguje rovnomerne práve vtedy, keď konverguje lokálne rovnomerne. (Úloha 7.1 zo skrípt.)

5. Dokážte, že vo vete 7.1.8 v skutočnosti možno predpoklad rovnomernej konvergencie nahradiť slabším predpokladom lokálne rovnomernej konvergencie. (Úloha 7.2 zo skrípt.)

6. Uvažujme *hlavnú vetvu* mocninovej funkcie $[\![z^\alpha]\!]$ definovanú pre $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ ako $z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$; ide teda o holomorfnú vetvu multifunkcie $[\![z^\alpha]\!]$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, pre ktorú je $1^\alpha = 1$. Označme ďalej $f(z) = (1+z)^\alpha$, kde umocňujeme s použitím tejto hlavnej vetvy.

   a) Dokážte, že pre všetky $\alpha \in \mathbb{C}$ a $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^\alpha = \alpha z^{\alpha - 1}$.

   b) Funkcia f je očividne holomorfná na $D(0,1)$. Z predchádzajúceho vzťahu odvoďte, že pre všetky $z \in D(0,1)$ je $(1+z)f'(z) = \alpha f(z)$.

   c) Ukážte, že pre $z \in D(0,1)$ je funkcia $f(z)$ daná *binomickým rozvojom*
   $$f(z) = (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,$$
   kde pre $\alpha \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ je
   $$\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!}.$$

   d) Nájdite obdobné Maclaurinove rozvoje aj pre ďalšie holomorfné vetvy mocninovej funkcie $[\![(1+z)^\alpha]\!]$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   (Úloha 7.9 zo skrípt.)

7. Dokážte alebo vyvráťte: ak $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ je holomorfná na $D(0,1)$, pričom ± 1 a $\pm i$ sú hromadnými bodmi $Z(f)$, je funkcia f na $D(0,1)$ nutne konštantne nulová. (Úloha 8.2 zo skrípt.)

8. Nech $T \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť.

   a) Dokážte, že množina $\mathbf{H}(T)$ funkcií holomorfných na T tvorí spolu s bežnými operáciami sčítania a násobenia funkcií obor integrity.

   b) Dokážte, že množina $\mathbf{M}(T)$ funkcií meromorfných na T tvorí spolu s operáciami sčítania a násobenia funkcií, nasledovaných odstránením prípadných odstrániteľných singularít, pole.

   (Úloha 9.11 zo skrípt, typické riešenie zahŕňa aj riešenia úloh 9.9 a 9.10.)