Druhá sada domácich úloh

1. Uvažujme funkciu $f\colon \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$, danú pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ ako
$$f(z) = \frac{-5iz - 1}{2\pi(z^2 + 1)}.$$
Nájdite všetky $I \in \mathbb{C}$ také, že pre nejakú uzavretú po častiach hladkú krivku γ s $\gamma^* \subseteq \mathbb{C}\setminus\{i, -i\}$ je
$$I = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$
(Úloha 11.5 zo skrípt.)

2. Zistite, či existuje funkcia f meromorfná na $\mathbb{C}$ taká, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ má funkcia f v bode n pól, pričom $\mathrm{Res}(f, n) = n$. Ak áno, skonštruujte takú funkciu; ak nie, dokážte. (Úloha 11.6 zo skrípt.)

3. Zistite, či existuje meromorfná funkcia f na nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$ taká, že pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje pól $a \in S$ funkcie f, pre ktorý je $\mathrm{Res}(f, a) = \alpha$. Ak áno, skonštruujte takú funkciu; ak nie, dokážte. (Úloha 11.7 zo skrípt.)

4. Dokážte nasledujúci variant Cauchyho princípu argumentu, založený na pojme indexu a nezávislý od Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vety: nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je meromorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S$ je uzavretá po častiach hladká krivka taká, že f je holomorfná a nenulová na γ^* a pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ je $\mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0$. Nech $Z(f)$ je množina koreňov a $P(f)$ je množina pólov funkcie f. Potom je v oboch týchto množinách iba konečný počet prvkov s nenulovým indexom vzhľadom ku krivke γ a
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in Z(f)} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\deg(a) - \sum_{b\in P(f)} \mathrm{Ind}_\gamma(b)\deg(b),$$
kde $\deg(w)$ označuje rád koreňa resp. pólu w. (Úloha 11.8 zo skrípt.)

5. Ak existuje, nájdite globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}$ s definičným oborom S takú, že pre všetky $z \in S$ je $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ alebo jednoprvková, alebo dvojprvková množina, pričom obidva tieto prípady nastanú pre aspoň jedno $z \in S$. (Úloha 12.2 zo skrípt.)

6. Ak existuje, nájdite globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}$ takú, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existuje $z \in \mathbb{C}$, pre ktoré je $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ presne n-prvková množina. (Úloha 12.3 zo skrípt.)

7. Zistite, či existuje funkcia f, holomorfná a reálna na $\mathbb{R}$, taká, že nejaké jej analytické predĺženie má aspoň jeden bod vetvenia. Ak áno, nájdite takú funkciu. Ak nie, dokážte. (Úloha 13.2 zo skrípt.)

8. Dokážte, že bod vetvenia b funkcie $\mathbf{f}$ konečného rádu je algebraický práve vtedy, keď existuje vlastná alebo nevlastná limita príslušnej vetvy funkcie $\mathbf{f}$ v bode b. (Úloha 13.3 zo skrípt.)