Prvá sada domácich úloh

1. Nájdite spočítateľne úplný polokruh $(S, +, \cdot, 0, 1, \Phi)$, ktorý nie je úplný.[1] (Úloha 1.6 zo skrípt.)

2. Existuje netriviálny okruh (s jednotkou), ktorý je súčasne aj spočítateľne úplným polokruhom? (Úloha 1.10 zo skrípt.)

3. Nech Σ je abeceda, S je polokruh a $r, s \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ sú mocninové rady. *Hadamardov súčin* radov r a s je rad $r \odot s \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ definovaný pre všetky $w \in \Sigma^*$ predpisom $(r \odot s, w) = (r, w)(s, w)$.

   a) Ukážte, že Hadamardov súčin na $\mathbb{B}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ možno interpretovať ako prienik formálnych jazykov.

   b) Dokážte, že pre všeobecný polokruh S a abecedu Σ množina radov $S\text{-Rat}(\Sigma^*)$ nemusí byť uzavretá na Hadamardov súčin.

   c) Dokážte, že množina radov $S\text{-Rat}(\Sigma^*)$ je uzavretá na Hadamardov súčin pre ľubovoľný *komutatívny* polokruh S a ľubovoľnú abecedu Σ. (Úloha 3.6 zo skrípt.)

4. Nech Σ je abeceda a $r \in \mathbb{N}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ je rad racionálny nad $\mathbb{N}$. Zistite, či musí byť v takom prípade racionálny jazyk $\mathrm{supp}(r)$. (Úloha 3.7 zo skrípt.)

5. Nech Σ je abeceda a $r \in \mathbb{Z}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ je rad racionálny nad $\mathbb{Z}$. Zistite, či musí byť v takom prípade racionálny jazyk $\mathrm{supp}(r)$. (Úloha 3.8 zo skrípt.)

Hovoríme, že polokruh T je *Fatouovým rozšírením* polokruhu S, ak je S podpolokruhom T a súčasne pre ľubovoľnú abecedu Σ a rad $r \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ racionálny nad T je rad r racionálny aj nad S.

6. Dokážte, že okruh $\mathbb{Z}$ nie je Fatouovým rozšírením polokruhu $\mathbb{N}$. (Úloha 3.9 zo skrípt.)

7. Dokážte, že každé rozšírenie $\mathbb{K}$ poľa $\mathbb{F}$ je aj jeho Fatouovým rozšírením. (Úloha 3.10 zo skrípt.)

8. Nech $\Sigma = \{a, b\}$. Zistite, či existuje formálny mocninový rad $r \in \mathbb{Z}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ racionálny nad $\mathbb{Z}$ taký, že $\mathrm{supp}(r) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. (Úloha 3.12 zo skrípt.)

9. Dokážte rozhodnuteľnosť problému ekvivalencie konečných automatov s váhami nad *konečnými* polokruhmi. (Úloha 3.18 zo skrípt.)

10. Preskúmajte rozhodnuteľnosť problému univerzality nosiča realizovaného radu pre konečné automaty s váhami nad polokruhom prirodzených čísel $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ a nad tropickým polokruhom $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$. (Úloha 3.19 zo skrípt.)

11. Uvažujme nasledujúci rozhodovací problém: na vstupe je daný konečný automat $\mathcal{A}$ s váhami nad poľom $\mathbb{Q}$ a abecedou Σ a treba rozhodnúť, či pre všetky $w \in \Sigma^*$ je $(\|\mathcal{A}\|, w) \in \{0, 1\}$. Je tento problém rozhodnuteľný?

    (*Návod*: použite uzavretosť množiny radov $\mathbb{Q}\text{-Rat}(\Sigma^*)$ na Hadamardov súčin dokázanú v rámci úlohy 3.) (Úloha 3.20 zo skrípt.)

12. Uvažujme nasledujúci rozhodovací problém: na vstupe je daný konečný automat $\mathcal{A}$ s váhami nad poľom $\mathbb{Q}$ a abecedou Σ a treba rozhodnúť, či pre všetky $w \in \Sigma^*$ je $(\|\mathcal{A}\|, w) > 0$. Je tento problém rozhodnuteľný?

    (*Návod*: použite uzavretosť množiny radov $\mathbb{Q}\text{-Rat}(\Sigma^*)$ na Hadamardov súčin dokázanú v rámci úlohy 3.) (Úloha 3.21 zo skrípt.)

---

[1] Teda *neexistuje žiadne* zobrazenie $\Psi\colon \mathcal{F}(S) \to S$ také, že pre všetky $F \in \mathcal{F}_\omega(S)$ platí $\Psi(F) = \Phi(F)$ a $(S, +, \cdot, 0, 1, \Psi)$ je úplný polokruh.