

Domáce úlohy

1. Existuje metrický priestor s nekonečnou nosnou množinou, v ktorom sú všetky postupnosti po dvoch rôznych prvkov konvergentné?
2. Nech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sú algebry rovnakého typu τ . Musí byť algebra $\mathcal{A}$ podalgebrou algebry $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$?
3. Nech $\mathcal{C}$ je trieda algebier typu τ . Dokážte, že vo všeobecnosti neplatia inklúzie **ISHC** $\supseteq$ **HSC**, **IPSC** $\supseteq$ **SPC** a **IPHC** $\supseteq$ **HPC**.¹
4. Nech $\mathcal{V}$ je varieta algebier typu τ . Algebru $\mathcal{A} = (A, (f^{\mathcal{A}})_{f \in \tau}) \in \mathcal{V}$ nazveme *reziduálne konečnou* vo $\mathcal{V}$, ak pre všetky $a \neq b \in A$ existuje konečná algebra $\mathcal{B} \in \mathcal{V}$ a homomorfizmus $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ algebier typu τ taký, že $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Dokážte, že algebra $\mathcal{A}$ je reziduálne konečná vo $\mathcal{V}$ práve vtedy, keď je izomorfná podalgebre súčinu konečných algebier z $\mathcal{V}$ (kde súčin môže byť ľubovoľnej kardinality).
5. Dokážte reziduálnu konečnosť voľného monoidu nad konečnou množinou generátorov X (vo variete všetkých monoidov).
6. Dokážte alebo vyvráťte: každý konečný monoid je izomorfný syntaktickému monoidu nejakého rozoznateľného jazyka.
7. Dokážte, že jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je rozoznateľný práve vtedy, keď je konečná množina pravých kvocientov $\{Lx^{-1} \mid x \in \Sigma^*\}$.
8. Nájdite *tesný* horný odhad na počet prvkov syntaktického monoidu rozoznateľného jazyka $L \subseteq \Sigma^*$ takého, že minimálny deterministický konečný automat nad Σ rozoznávajúci L má $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ stavov.
9. Nech X je množina. *Monoidom transformácií* množiny X nazveme ľubovoľný monoid typu $(T, \circ, \text{id}_X)$, kde $T \subseteq X^X$ je množina zobrazení z X do X uzavretá na operáciu $\circ$ skladania zobrazení a obsahujúca identické zobrazenie id_X . Dokážte alebo vyvráťte: každý monoid je izomorfný nejakému monoidu transformácií.
10. Nájdite príklad konečne generovanej nekonečnej pologrupy, pre ktorú Greenove relácie D a J nesplývajú.
11. Opíšte štruktúru Greenových relácií syntaktického monoidu jazyka $(ab)^*$ (napr. nakreslite jeho egg-box diagram).
12. Opíšte pseudovarietu konečných monoidov $\llbracket x^\omega = x, xy = yx \rrbracket$ a varietu rozoznateľných jazykov, ktorá jej prislúcha pri Eilenbergovej korešpondencii.

¹To znamená, že neplatia inklúzie **SHC** $\supseteq$ **HSC**, **PSC** $\supseteq$ **SPC** a **PHC** $\supseteq$ **HPC**, a to ani v prípade, že stotožníme navzájom izomorfné algebry.