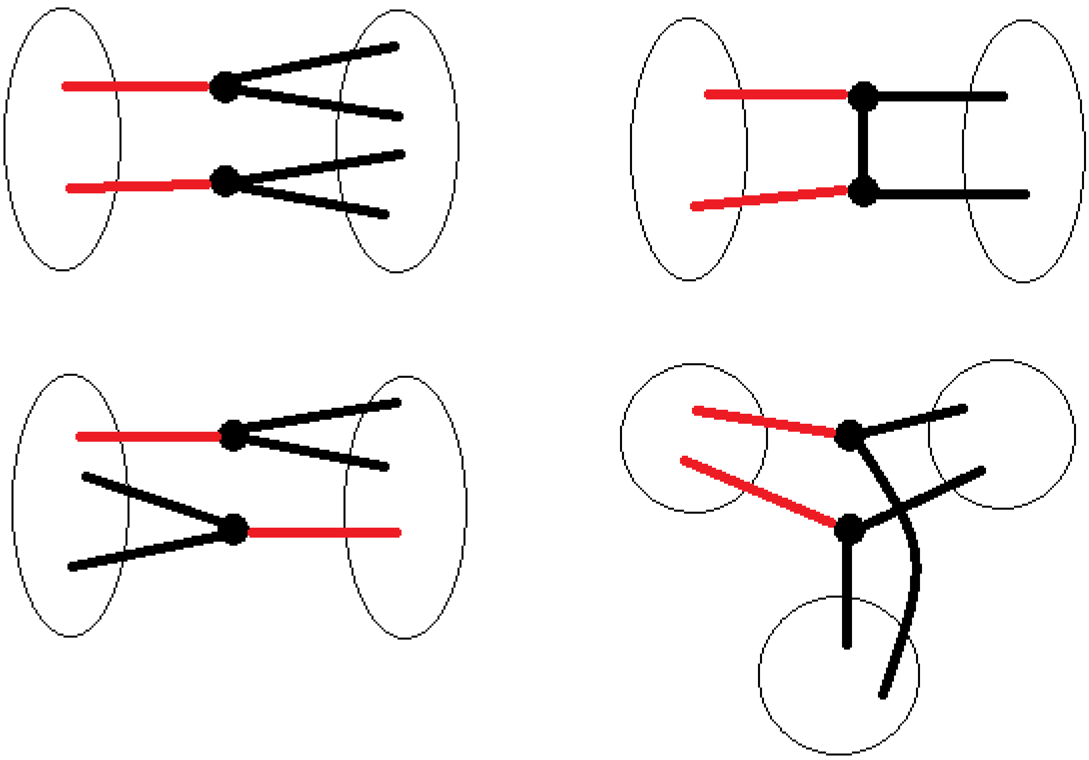
Úloha 1. Pre ktoré kubické, t.j. 3-regulárne grafy platí $\kappa(G) < \lambda(G)$?

Chceme ukázať, že pre každý kubický graf G platí $\kappa(G) = \lambda(G)$. Z tvrdenia z prednášky viete, že $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. Keďže, G je kubický, jediné prípustné hodnoty pre $\kappa(G)$ su 0,1,2,3. Rozoberme všetky prípady.

- $\kappa(G) = 0$. Kedže graf je nesúvislý, tak je aj hranovo nesúvislý, tvrdenie pre tento prípad triviálne platí.
- $\kappa(G) = 1$. Graf obsahuje artikuláciu v. Keďže G je kubický graf, tak $c(G \setminus \{v\})$ je buď 2 alebo 3, kde $c(H)$ je počet komponentov súvislosti grafu H. Kedže v je stupňa 3, je zrejmé, že aspoň jeden komponent bol s v spojený iba jednou hranou, ktorá je teda most. Kedže G obsahuje most tak $\lambda(G) = 1$ a tvrdenie teda opäť platí.
- $\kappa(G) = 2$. Pokiaľ graf obsahuje vrcholový 2-rez, nastáva jeden zo 4 prípadov na obrázku nižšie. V každom prípade možno odobrať 2 (červené) hrany tak, že $G \setminus$ *červené hrany* je nesúvislý. Z toho vypláva že $\lambda(G) = 2$ a tvrdenie opať platí.



- $\kappa(G) = 3$. Jednoduchým dosadením známych hodnôt do známej vety $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ dostávame $3 \leq \lambda(G) \leq 3$, z čoho je opäť jasné, že tvrdenie platí.

Keďže sme dokázali tvrdenie, že pre každý kubický graf platí $\kappa(G) = \lambda(G)$, znamená to, že neexistuje graf pre ktorý by platilo $\kappa(G) < \lambda(G)$.

Úloha 2. Nech G je 2-súvislý graf a v je jeho vrchol. Kedy pre takúto dvojicu existuje vrchol u rôzny od v taký, že $G \setminus \{u, v\}$ je súvislý graf?

Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, načrtnem niektoré.

- Pomocou konštrukcie 2-súvislých grafov z prednášky. Ak je G kružnica, stačilo za u zvoliť susedný vrchol v. Pokiaľ G nie je kružnica, tak G vznikol pridávaním H-ciest k počiatočnej kružnici C. Bolo treba si dať pozor na to, aby sme za u nevybrali vrchol, ktorý je vrcholom nejakej H-cesty začínajúcej vo v, (alebo naopak) pretože práve vtedy by sa graf mohol rozpadnúť. Bolo treba ošetriť pár prípadov, a mohlo to byť pracné.
- Najjednoduchšie sa to dalo ukázať nasledovne. Vieme, že G je 2-súvislý. Odstránením v teda buď súvislosť klesne na 1, alebo zostane na 2.

- Ak $\kappa(G \setminus \{v\}) = 2$, môžeme odstrániť hociktorý vrchol u a $G \setminus \{u, v\}$ bude stále súvislé.
- Ak $\kappa(G \setminus \{v\}) = 1$, môžeme odstrániť iba také vrcholy, ktoré nie sú artikulácie. Spravme si teda kostru K grafu $G \setminus \{v\}$. Vieme, že K je minimálny súvislý podgraf $G \setminus \{v\}$. Je zrejmé, že vrchol u, ktorý je v K listom, nemože byť artikuláciou v $G \setminus \{v\}$. Preto opäť $\kappa(G \setminus \{v, u\}) > 0$.

Videl som aj iné správne riešenia, ale neuvádzal by som ich ako "vzorové".