Prednášky z teórie grafov

Edita Máčajová

Milí súčasní a budúci milovníci teórie grafov!

Tento text vznikol ako pomocný materiál k prednáške z základnému kurzu Teórie grafov. Pokrýva oblasti, ktoré sú “vstupnou bránou"do tejto časti matematiky.

V texte nájdete úlohy označené znakom ♣. Odporúčam si ich urobiť vo chvíli, keď sa v tomto texte k nim dočítate. Často ide o nie príliš komplikované zadanie, ktoré má pomôcť pri osvojení si nového pojmu, či súvislostí.

Text vznikal postupne a som vďačná viacerým študentom, ktorí ma upozornili na preklepy a tažsie zruzumiteľné miesta. Pomohli tak aj študentom, čo prídu po nich.

Príjemné čítanie praje

Edita Máčajová

Obsah

1 Úvod

Pomocou pojmov z teórie grafov sa dá prirodzeným spôsobom modelovať množstvo problémov a úloh z bežného života. O nasledujúcom probléme sa hovorí, že bol pri zrode teórie grafov. Pruským mestom Königsberg (dnešný Kalingrad) preteká rieka Pregel, ktorá má niekoľko ostrovov patriacich mestu. Medzi ostrovmi a brehmi rieky je niekoľko mostov. Domáci si kládli otázku, či sa dá začať prednásku na najakom mieste, presť kadým mostom práve raz a vrátiť sa na miesto začiatku prechádzky.

2 Základné pojmy a označenia

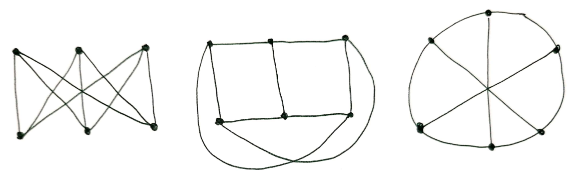
Graf $G = (V, E)$ je daný konečnou neprázdnou množinou vrcholov V a množinou hrán E, kde E je množina 2-prvkových podmnožín množiny V. Grafy obyčajne zobrazujeme v rovine tak, že vrcholom priradíme rôzne body roviny a každej hrane zodpovedá súvislá čiara spájajúca body zodpovedajúce dvom vrcholom hrany.

Definície:

- vrchol v je *incidentný* s hranou e ak $v \in e$
- dva vrcholy, ktoré sú incidentné s hranou e voláme *koncové* vrcholy hrany e
- dva koncové vrcholy tej istej hrany voláme *susedné*
- hranu s koncovými vrcholmi u a v označujeme uv (čiže množinové zátvorky vynechávame)
- dve hrany, ktoré zdieľajú vrchol voláme *susedné*
- $N(v)$ je množina susedov vrchola v
- *stupeň vrchola* v – počet hrán incidentných s v; označenie $d_G(v)$, alebo $d(v)$
- *minimálny stupeň* $\delta(G) = \min\{d(v)|v \in V(G)\}$
- *maximálny stupeň* $\Delta(G) = \max\{d(v)|v \in V(G)\}$
- ak všetky dvojice vrcholov sú navzájom susedné, graf nazývame *kompletný*; kompletný graf na n vrcholoch označujeme K_n
- *kružnica* na n vrcholoch, označovaná C_n, je graf (V, E), kde $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a $E = \{v_n v_1, v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n\}$
- graf nazveme *triviálny*, ak obsahuje jeden vrchol (a žiadne hrany)
- graf nazveme *regulárny* ak majú všetky jeho vrcholy rovnaký stupeň. Ak tento spoločný stupeň je k, graf nazveme k-*regulárny*.
- dva grafy $G(V, E)$ a $G'(V', E')$ sú *izomorfné*, označenie $G \simeq G'$ ak existuje bijekcia $\varphi : V \to V'$ taká že $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ pre všetky dvojice vrcholov x a y.
  - zobrazenie φ sa volá *izomorfizmus*

– ak $G = G'$, φ sa volá *automorfizmus*

♣ Nahliadnite, že tri grafy na Obr. 1 sú izomorfné.



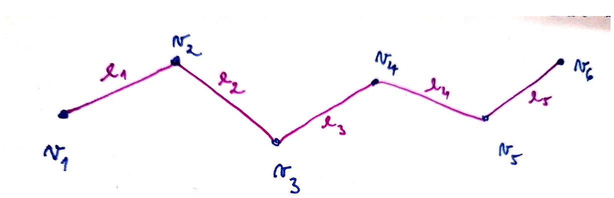
Obr. 1

- graf $G(V, E)$ je *podgrafom* grafu $G'(V', E')$ ak $V \subseteq V'$ a $E \subseteq E'$; označenie $G \subseteq G'$
- *faktor* grafu G je podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy
- Nech G je graf a nech $U \subseteq V(G)$. Podgraf grafu G s množinou vrcholov U a hranovou množinou, ktorá obsahuje všetky hrany z G s oboma koncovými vrcholmi v U nazveme *indukovaný* podgraf.

Tvrdenie 2.1. *Každý graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.*

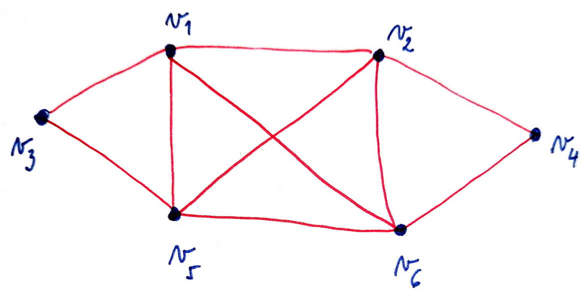
Dôkaz. Súčet stupňov vrcholov $\sum_{v \in V(G)} d(v)$ je párne číslo, lebo každá hrana je zarátaná dvakrát. Z toho vyplýva, že v súčte je párny počet nepárnych sčítancov. □

- *sled* – postupnosť $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \dots v_n$, kde v_i je vrchol pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, e_i je hrana pre $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ a
- *ťah* je sled, kde sa neopakujú hrany; *uzavretý ťah* je ťah, ktorého prvý a posledný vrchol sa rovnajú
- *cesta* je sled, kde sa neopakujú vrcholy (a teda ani hrany); *u-v-cesta* je cesta s koncovými vrcholmi u a v
  – *dĺžka* cesty (sledu/ťahu) je počet hrán (sledu/ťahu)
  – P_k cesta dĺžky k



Obr. 2: Cesta dĺžky 5

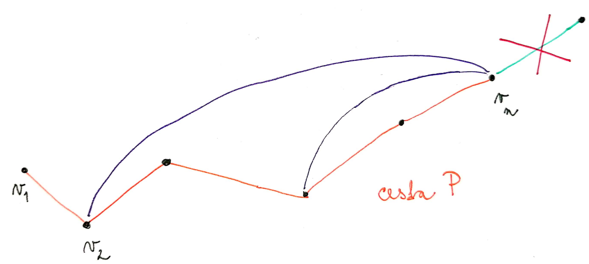
- keďže uvažujeme jednoduché grafy (t.j. grafy bez slučiek a násobných hrán), sled, ťah a cesta sú jednoznačne zadané postupnosťou vrcholov, a teda názvy hrán nemusíme písať, pozri Obr. 3



Obr. 3: Na obrázku je graf G. Postupnosť $v_1v_2v_4v_6v_5$ je cesta, $v_1v_2v_6v_4v_2v_5$ je ťah a $v_1v_2v_4v_6v_2v_1v_3$ je sled v grafe G.

Tvrdenie 2.2. *Každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$.*

Dôkaz. Nech $P = v_1v_2 \dots v_n$ je najdlhšia cesta v grafe G. Ak by nejaký sused vrchola v_n ležal mimo P, tak by to bolo v spore s tým, že P je najdlhšia cesta v G. Preto všetci susedia v_n, ktorých je aspoň $\delta(G)$ ležia na P, pozri Obr. 4. Vrchol v_n takisto leží na P, a teda P má aspoň $\delta(G) + 1$ vrcholov. Z toho vyplýva,že dĺžka P je aspoň $\delta(G)$. □



Obr. 4: Všetci susedia vrchola v_1 ležia na ceste P

- graf je *súvislý* ak medzi každou dvojicou vrcholov existuje cesta, inak je *nesúvislý*
- *komponent* grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G vzhľadom na inklúziu
- graf nazveme *acyklický*, ak neobsahuje kružnicu
- *strom* je súvislý acyklický graf
- *les* je acyklický graf
- *list* je vrchol stupňa 1 v strome

Veta 2.3. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné pre graf T*
(a) *T je strom*
(b) *každá dvojica vrcholov v T je spojená práve jednou cestou v T*
(c) *T je minimálny súvislý, t.j. T je súvislý, ale pre každú hranu $e \in T$, graf $T - e$ je nesúvislý (odoberáme len hranu e bez jej koncových vrcholov)*
(d) *T je maximálny acyklický, t.j. T neobsahuje kružnicu, ale $T + xy$ obsahuje kružnicu pre každú dvojicu nesusedných vrcholov x a y z T*

Dôkaz. Dokážeme iba ekvivalenciu (a)$\Leftrightarrow$(c), ostatné sa dokazujú podobne.

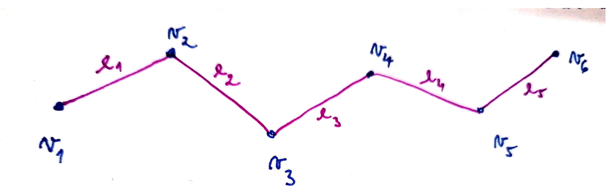
(a)$\Rightarrow$(c) Nech T je strom. Podľa definície je T súvislý graf. Sporom predpokladajme, že T nie je minimálny súvislý, t.j. že obsahuje hranu e takú, že $T - e$ je súvislý. Nech u a v sú koncové vrcholy hrany e. V $T - e$ existuje u-v-cesta, nazvime ju P. Potom $P \cup \{e\}$ je kružnica v T, čo je nemožné, keďže T je strom.

(c)$\Rightarrow$(a) Nech T je minimálny súvislý graf. Jedna z podmienok definície stromu je teda zjavne splnená (súvislosť). Dokážme, že T je acyklický. Ak by obsahoval kružnicu, tak pre ľubovoľnú hranu e z tejto kružnice by platilo, že $G - e$ je súvislý, čo by bolo v spore s tým, že G je minimálny súvislý. □

- *kostra* grafu G je podgraf grafu G, ktorý je strom a obsahuje všetky vrcholy grafu G

Tvrdenie 2.4. *Každý súvislý graf obsahuje kostru.*

Dôkaz. Opakovane vyhadzujeme hranu, ktorá leží v kružnici. □



Obr. 5

3 Bipartitné grafy

- graf G je *bipartitný* ak $V(G)$ sa dá rozložiť do dvoch množín A a B tak, že každá hrana má jeden koncový vrchol v A a druhý v B.

♣ Pre ktoré čísla n je sú grafy nazývané *rebrík* a *skrútený rebrík* bipartitné?

Ľahko sa dá nahliadnuť, že v bipartitnom grafe má každá kružnica párnu dĺžku. Dokážeme, že platí aj opačná implikácia. Najprv však dokážeme lemu.

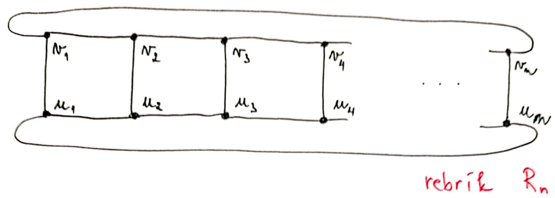
Lema 3.1. *Každý uzavretý sled nepárnej dĺžky obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

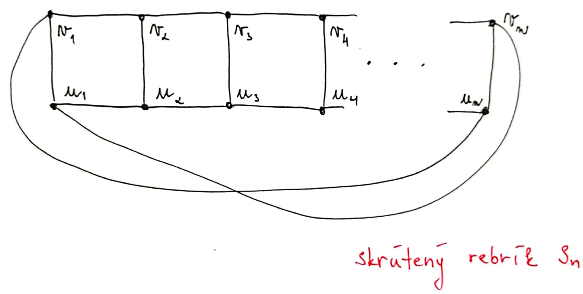
Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku sledu. Ako bázu zoberieme uzavretý sled na troch hranách (uzavretý sled na jednej hrane v jednoduchých grafoch neexistuje). A keďže uzavretý sled na troch hranách je kružnica na troch hranách, tu tvrdenie platí.

Majte uzavretý sled S nepárnej dĺžky d a predpokladajme, že pre všetky uzavreté sledy nepárnej dĺžky menšej ako d toto tvrdenie platí. Nech $S = v_1 v_2 \dots v_n$, pričom $v_n = v_1$.

Prípad 1. $v_i \neq v_j$ pre všetky $i \neq j$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, a teda vrcholy sa v slede neopakujú okrem $v_n = v_1$. V tomto prípade je S kružnicou nepárnej dĺžky.

Prípad 2. $v_i = v_j$ pre nejaké $i \neq j$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $i < j$. Uvažujme dva sledy





Obr. 6: Rebrík R_n a Skrútený rebrík S_n

$S' = v_1 v_2 \dots v_i = v_j v_{j+1} \dots v_n = v_1$ a
$S'' = v_i v_{i+1} \dots v_j = v_i$.

Ľahko vidno, že oba S' aj S'' sú uzavreté sledy. Navyše dĺžka sledu S je súčtom dĺžok sledov S' a S'', a keďže S je nepárnej dĺžky, dĺžka práve jedného z S' a S'' je nepárna, nech je to S'. Použitím indukčného predpokladu nahliadneme, že S' a teda aj S obsahuje uzavretý sled nepárnej dĺžky. □

Poznamenajme, že ak by sme zmenili oba výskyty slova nepárny v znení lemy na slovo párny, tvrdenie by nebolo pravdivé.

♣ Nájdite príklad sledu, ktorý je protipríkladom k pozmenenému tvrdeniu.

- *vzdialenosť vrcholov u a v* v grafe G, označenie $dist(u, v)$, je dĺžka najkratšej u-v-cesty

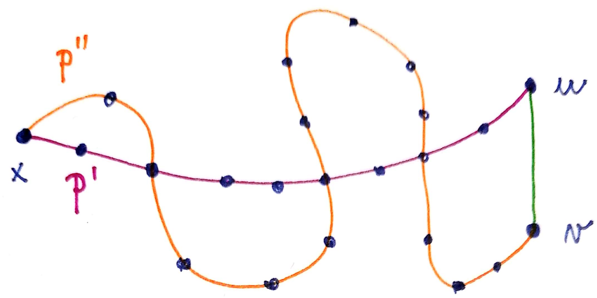
Veta 3.2. *Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

Dôkaz. Dokážeme dve implikácie.

($\Rightarrow$) Táto implikácia je zrejmá, keďže na každej kružnici sa musia striedať vrcholy z dvoch množín.

($\Rightarrow$) Majme graf G ktorý má každú kružnicu párnej dĺžky. Dokážeme, že G je bipartitný. Môžme predpokladať, že G je súvislý, lebo inak môžme urobiť pre každý komponent a využiť fakt, že zjednotenie bipartitných grafov je bipartitný graf. Nech x je ľubovoľný pevne zvolený vrchol grafu G. Rozdeľme množinu $V(G)$ do dvoch množín:
$A = \{v \in V(G); dist(v, x)$ je párne číslo$\}$ a
$B = \{v \in V(G); dist(v, x)$ je nepárne číslo$\}$.

Zjavne každý vrchol z $V(G)$ patrí do práve jednej z množín A a B. Ukážeme, že každá hrana z $E(G)$ má jeden koniec v A a druhý v B. Sporom predpokladajme, že existuje hrana $e \in E(G)$, ktorej oba koncové vrcholy patria A. (Dôkaz, že oba koncové vrcholy nemôžu patriť B je obdobný.) Nech $e = uv$, nech P' je cesta, na ktorej sa nadobúda najkratšia vzdialenosť medzi u a x a nech $e = uv$, nech P'' je cesta, na ktorej sa nadobúda najkratšia vzdialenosť medzi v a x. Potom $S = P' \cup P'' \cup uv$ je uzavretý sled, pozri Obr. 7. Keďže u aj v patria A, obe cesty P' a P'' majú párnu dĺžku. Sled S je teda nepárnej dĺžky a podľa Lemy 3.1 obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, čo je v spore s predpokladom. Dôkaz spätnej implikácie je ukončený. □



Obr. 7

4 Eulerovské grafy

- *eulerovský ťah* v grafe G je uzavretý ťah v G, ktorý obsahuje každú hranu. Graf je *eulerovský* ak obsahuje eulerovský ťah.
- *hranový rez* S v súvislom grafe grafe G je množina hrán taká, že $G - S$ je nesúvislý graf a je minimálna vzhľadom na inklúziu s touto vlastnosťou

Nie je ťažké nahliadnuť, že nutnou podmienkou na to, aby súvislý graf bol eulerovský je, aby stupeň každého vrchola bol párny. Euler v práci [7] vyslovil tvrdenie, že táto zjavná nutná podmienka je aj postačujúca. Toto tvrdenie však bolo uvedené v práci bez dôkaza. Prvý publikovaný dôkaz sa nachádza v práci Hierholzera [13] z roku 1873.

Lema 4.1. *Nech G je graf, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň 2. Potom G obsahuje kružnicu.*

Dôkaz. Nech $P = v_1 v_2 \ldots v_n$ je najdlhšia cesta v G. Vrchol v_1 musí mať okrem v_2 ešte aspoň jedného suseda, keďže v_1 je stupňa aspoň 2. Nech x je sused vrchola v_1 a $x \neq v_1$. Vzhľadom na to, že P je najdlhšia cesta, musí x patriť P, čiže $x = v_i$ pre nejaké $i > 2$. Potom $v_1 v_2 \ldots v_i v_1$ je kružnica v grafe G. □

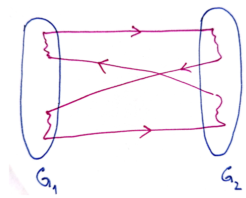
♣ Je pravda, že v grafe, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň 2 leží každý vrchol na kružnici?

Veta 4.2. *Nasledujúce tvrdenia sú v súvislom netriviálnom grafe G ekvivalentné.*
(a) *G je eulerovský*
(b) *stupeň každého vrchola grafu G párny*
(c) *každý hranový rez grafu G má párny počet hrán*
(d) *hranová množina grafu G sa dá rozložiť na množinu kružníc*

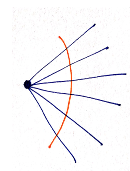
Dôkaz. Dokážeme nasledujúce implikácie: (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).

$(a) \Rightarrow (c)$ Nech G je eulerovský graf a nech S je hranový rez v G. Odobratím S z G dostaneme dva grafy, povedzme G_1 a G_2. Prechádzajme teraz po ľubovoľnom eulerovskom ťahu v G. Zjavne, pre hrany z S platí, že ich prechádzame striedavo, jednu hranu v smere z G_1 do G_2 a ďalšiu naopak. Keďže skončíme v tom G_i, v ktorom sme začali, hrán prejdených z G_1 do G_2 je rovnako veľa, ako hrán prejdených z G_2 do G_1, a teda S musí obsahovať párny počet hrán, pozri Obr. 9(a).

$(c) \Rightarrow (b)$ hrany incidentné s jedným vrcholom tvoria hranový rez, takže tvrdenie (b) vyplýva z tvrdenia (c), pozri Obr. 9(b).



(a) Implikácia $(a) \Rightarrow (c)$



(b) Implikácia $(c) \Rightarrow (b)$

Obr. 8

$(b) \Rightarrow (d)$ Majme graf G, ktorého každý vrchol má párny stupeň. Keďže G je podľa predpokladu súvislý a netriviálny, neobsahuje vrcholy stupňa 0, a teda každý jeho stupeň je aspoň 2. Podľa Lemy 4.1 graf G obsahuje kružnicu, povedzme C. Odobratím jej hrán a následne izolovaných vrcholov dostávame graf, ktoré každý komponent má všetky vrcholy párneho stupňa. Opakovaním tohto postupu, môžeme hranovú množinu každého z týchto komponentov rozložiť na množinu kružníc, ktoré spolu s C tvoria rozklad hranovej množiny grafu G na množinu kružníc.

$(d) \Rightarrow (a)$ Pre dôkaz tejto implikácie predpokladajme, že G je súvislý graf, ktorého hranová množina sa dá rozložiť na kružnice a ukážeme, že G obsahuje eulerovský ťah. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet kružníc. Za bázu zoberieme prípad, keď je v rozklade jediná kružnica, tá je potom zároveň aj eulerovským ťahom.

Predpokladajme teda, že v rozklade grafu G je k kružníc, povedzme $C_1, C_2, \ldots, C_k$ a pre všetky súvislé grafy, ktoré majú rozklad na menej, ako k kružníc tvrdenie platí. Zostrojme G' z grafu G tak, že odoberieme hrany kružnice C_k. Dostaneme niekoľko (možno jeden) komponentov, z ktorých každý je zjednotením hranovo dizjunktných kružníc, a teda, podľa indukčného predpokladu každý z týchto komponentov obsahuje eulerovský ťah. Skonštruujme teraz eulerovský ťah v G. Postupujme postupne po kružnici C_k a vždy, keď sa dostaneme ku komponentu, ktorý ešte nie je zapojený v ťahu, použime eulerovský ťah v ňom. Takto postupne na C_k “prilepíme"ťahy zo všetkých komponentov grafu $G - E(C)$ a dostaneme eulerovský ťah v G. $\square$

5 Pochôdzky v grafoch

- labyrinty, bludiská
- matematické štúdium až koncom 19. storočia [Lucas, 1882]
- úlohou je nájsť s-t-sled pre dané dva vrcholy s a t

5.1 Tarryho prieskum grafov

Postupne predlžujeme sled, pričom dodržujeme nasledujúce pravidlá
(T1) Každou hranou môžeme v jednom smere prechádzať nanajvýš raz.
(T2) Po hrane, po ktorej sme prišli do daného vrcholu prvý krát (*objaviteľská* hrana) môžeme odísť len ak niet inej možnosti.

Veta 5.1. (a) *Tarryho prieskum je konečný.*
(b) *Nech s je počiatočný vrchol sledu Q. Ak pravidlá (T1) a (T2) nedovoľujú predĺžiť sled Q, tak posledný vrchol sledu je zhodný s vrcholom s (teda Q je uzavretý) a každá hrana komponentu obsahujúceho s je prejdená oboma smermi.*

Dôkaz. (a) Keďže graf je konečný a každá hrana je predjená najviac dvakrát, prieskum je konečný.
(b) Nech Q je s-x-sled utvorený s dodržaním pravidiel (T1) a (T2), ktorý už nemožno predĺžiť. Dokážeme, že $x = s$. Sporom predpokladajme, že $x \neq s$. Nech e je hrana, ktorou sme x objavili. Keďže Q je nepredĺžiteľný, hrana e je už prejdená aj v smere od x. Vráťme sa do okamihu tesne po tomto prejdení hrany e. Nech
a^0 počet hrán incidentých s x, ktoré nie sú prejdené ani v jednom smere
a^- počet hrán incidentých s x, ktorými sme do x len prišli
a^+ počet hrán incidentých s x, ktorými sme z x len odišli
a^{+-} počet hrán incidentých s x, ktorými sú prejdené oboma smermi

Keďže už bola použitá hrana e na odchod z x, z pravidla (T2) vyplýva $a^0 = a^- = 0$. Počet príchodov do x sa rovná počtu odchodov a teda $a^+ + a^{+-} = a^- + a^{+-}$ a teda aj $a^+ = 0$, čiže všetky hrany incidenté s x sú prejdené dvakrát. To znamená, že po tomto odchode z x sa do x už nikdy nedostaneme, spor. Platí $x = s$.

Teraz ukážeme, že každá hrana v komponente obsahujúcom s je v Q prejdená raz každým smerom. Nech $s = u_0, u_1, \ldots, u_q$ je poradie vrcholov, v akom sa v Q vyskytujú prvý krát. Matematickou indukciou vzhľadom na r ukážeme, že hrany incidujúce s u_r su prejdené oboma smermi.
Báza indukcie $u_0 = s$ ... podobne ako vyššie
Nech $r > 0$, nech $u_k u_r$ je hrana, ktorou sme do u_r prišli prvý krát. Keďže $k < r$, podľa indukčné predpokladu je hrana $u_k u_r$ prejdená oboma smermi. Ale po jej prejdení v smere od u_r už musia byť všetky hrany incidentné s u_r prejdené oboma smermi (rovnaký dôkaz ak hore). □

- ak chceme nájsť cestu z s do x zastavíme v x. Máme s-x-sled. Jeho podsled pozostávajúci z hrán prejdených práve raz je s-x-ťah (nie nutne cesta).
  Dôvod: Nech R je podgraf indukovaný hranami daného sledu, ktoré sú prejdené len raz. Všetky vrcholy v R okrem s a x sú párneho stupňa. Ak by bol R nesúvislý, odvodíme spor s výberom hrany pri prechode.

5.2 Trémauxov prieskum grafov

Pravidlá (T1) a (T2) doplníme o pravidlo:
(T3) Ak prídeme hranou prechádzanou prvý krát do známeho vrchola, tak hned v nasledujúcom kroku sa touto hranou vraciame.

- nech s-x-sled T je sled nájdený Trémauxovým algoritmom. Podsled sledu T pozostávajúci z hrán prejdených práve raz je s-x-cesta.
- Trémauxov prieskum – prehladávanie do hĺbky

6 Súvislosť

- Už vieme, čo znamená, že graf je *súvislý* a čo je to *komponent* grafu.
- *artikulácia* je vrchol, odobratím ktorého vznikne graf s viac komponentmi, ako mal pôvodný graf; podobne *most* je hrana, odobratím ktorej vznikne graf s viac komponentmi, ako mal pôvodný graf
- *blok* – maximálny súvislý podgraf bez artikulácií
- *Blokovo-artikulačný graf* B grafu G skonštruujeme nasledovne: vrcholová množina grafu B sa skladá z blokov a artikulácií grafu G a dva vrcholy v B sú susedné ak jeden z nich zodpovedá artikulácii a druhý bloku v G, pričom artikulácia patrí bloku.
- ak z grafu odoberáme vrchol, tak s ním musíme odobrať aj všetky hrany s ním incidentné. Ak z grafu odoberáme hranu, koncové vrcholy ponechávame. Ak W je množina vrcholov alebo graf a z je vrchol, tak $W-\{z\}$ zapisujeme aj $W-z$. Obdobné platí, ak ide o hranu.
- G sa nazýva *k-súvislým* ak $|V(G)| > k$ a pre každú množinu vrcholov $X \subseteq V$ takú, že $|X| < k$ platí, že graf $G-X$ je súvislý. Najväčšie celé číslo k také, že G je k-súvislý sa nazýva *súvislosť* $\kappa(G)$ grafu G.
- čiže $\kappa(K_1) = 0$, $\kappa(G) = 0$ pre nesúvislý graf G, $\kappa(K_n) = n - 1$ pre všetky $n \geq 1$
- graf G sa nazýva *hranovo l-súvislý* ak $|V(G)| > 1$ a pre každú množinu hrán F grafu G takú, že $|F| < k$ je graf $G - F$ súvislý. Najväčšie celé číslo l také, že G je hranovo l-súvislý sa volá *hranová súvislosť* $\lambda(G)$ grafu G.
- $\lambda(G) = 0$ ak G je nesúvislý

♣ Je pravda, že ak $d(v) \geq 2$ pre všetky vrcholy grafu G, tak G je vrcholovo 2-súvislý?

Tvrdenie 6.1. *Blokovo-artikulačný graf súvisléhou graf je strom.*

Dôkaz. Nech B je blokovo-artikulačný graf súvislého grafu G. Potrebujeme nahliadnuť, že B je súvislý a acyklický. Keďže G je súvislý, TODO □

Tvrdenie 6.2. *Ak G je netriviálny graf, tak $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Dôkaz. Druhá nerovnosť vyplýva z toho, že všetky hrany ohraničujúce vrchol tvoria hranový rez. Predpokladajme teraz, že F je minimálna množina hrán, taká že $G - F$ je nesúvislý. Ukážeme, že $\kappa(G) \leq |F|$.

Najprv predpokladajme, že G obsahuje vrchol v, ktorý nie je incidentný so žiadnou hranou z F. Nech C je komponent grafu $G - F$, ktorý obsahuje v. Potom vrcholy $C \cap F$ oddeľujú v od $G - C$ a teda $\kappa(G) \leq |F|$.

Predpokladajme teraz, že každý vrchol grafu G je incidentný s hranou z F. Nech v je ľubovoľný vrchol grafu G a nech C je komponent grafu $G - F$, ktorý obsahuje vrchol v. Potom susedia v v C sú incidentní s rôznymi hranami z F a teda $d(v) \leq |F|$. Ak $V(G) \neq \{v\} \cup N(v)$, tak $N(v)$ separuje v od zvyšku grafu. Inak $V(G) = \{v\} \cup N(v)$. Túto úvahu môžeme urobiť pre ľubovoľný vrchol. Buď teda existuje v G vrchol x taký, že $N(x)$ separuje x od zvyšku grafu alebo pre všetky $x \in V(G)$ platí, že $V(G) = \{x\} \cup N(x)$. V druhom prípade je G kompletný graf a tvrdenie platí, lebo $\kappa(G) = \lambda(G) = |V(G)| - 1$. □

6.1 2-súvislé grafy

- Nech H je graf. Cestu dĺžky aspoň 1 nazveme *H-cestou*, ak zdieľa s H práve svoje koncové vrcholy. Ak $u, v \in V(H)$ a hrana $uv \notin E(H)$, tak uv je H-cesta.

Tvrdenie 6.3. *Graf je 2-súvislý, práve vtedy, ak sa dá skonštruovať z kružnice postupným pridávaním H-ciest k už skonštruovanému grafu H.*

Dôkaz. ($\Leftarrow$) Ak graf je skonštruovaný tak, ako je napísané, je 2-súvislý.
($\Rightarrow$) Predpokladajme, že G je 2-súvislý. Potom G obsahuje kružnicu. Nech H je maximálny podgraf grafu G, ktorý sa dá skonštruovať ako je napísané. Keďže každá hrana z $E(G) - E(H)$ by bola H-cestou, graf H je indukovaný podgraf grafu G. Ak $H \neq G$, tak existuje vrchol $v \in G - H$. Z toho, že G je súvislý vyplýva, že môžeme predpokladať, že v je susedný s vrcholom $w \in H$. Keďže G je 2-súvislý, graf $G - w$ obsahuje v-H-cestu P. Potom wvP je H-cesta v G a $H \cup wvP$ je graf skonštruovaný podľa zadania a väčší ako H, spor. □

Dôsledok 6.4. *V 2-súvislom grafe leží každý vrchol na kružnici.*

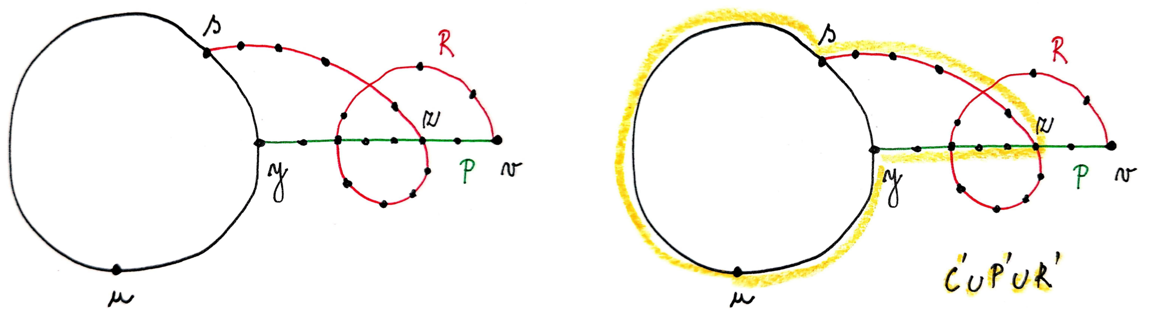
Dôkaz. Nech G je 2-súvislý. Dokážeme, že každý vrchol v leží na kružnici. Podľa Tvrdenia 6.3 sa G dá skonštruovať z kružnice, povedzme C, postupným pridávaním H-ciest. Ak $v \in V(C)$, tak nie je čo dokazovať. Inak v bol pridaný ako súčasť niektorej z H ciest k už skonštruovanéhmu grafu. Nech X je táto H-cesta a predpokladajme, že bola pridaná k podgrafu G_1 grafu G. Nech p a q sú koncové vrcholy cesty X. Keďže G_1 je súvislý, musí obsahovať p-q-cestu, povedzme Y. Potom ale $X \cup Y$ je kružnica, ktorá obsahuje v. □

♣ Platí aj opačná implikácia? T.j. je pravda, že ak každý vrchol grafu leží na kružnici, tak graf je 2-súvislý?

Tvrdenie 6.5. *Každé dva vrcholy v 2-súvislom grafe ležia na spoločnej kružnici.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že u a v sú dva vrcholy 2-súvislého grafu G, ktoré neležia na spoločnej kružnici. Keďže G je 2-súvislý graf, podľa Dôsledku 6.4 vrchol u leží na nejakej kružnici. Nech C je kružnica, ktorej patrí vrchol u a zároveň vzdialenosť C a v je minimálna, pričom vzdialenosť vrchola v a kružnice C je definovaná
$dist(v, C) = \min\{dist(v, x) | x \in V(C)\}$,
čiže je to vzdialenosť v od toho vrcholu C, ktorý je k v najbližšie. Nech P je cesta, kde sa $dist(v, C)$ nadobúda. Nech y je spoločný vrchol C a P. Keďže predpokladáme, že

neexistuje kružnica v G, ktorá by obsahovala oba vrcholy u a v, cesta P má nenulovú dĺžku. Graf G je 2-súvislý, a teda graf $G - y$ je súvislý, a tak v $G - y$ existuje cesta medzi v a niektorým vrcholom z $V(C) - y$, nech R je najkratšia taká cesta a nech druhý koniec R je vrchol s. Nech z je posledný vrchol cesty R, ktorý patrí P ak postupujeme od v k vrcholu z $V(C) - y$, pozri Obr. 9a. Nech P' je podcesta cesty P s koncovými vrcholmi y a z, R' je podcesta cesty R s koncovými vrcholmi s a z a C' je podcesta kružnice C s koncovými vrcholmi s a y, ktorej patrí vrchol u. Potom $C' \cup P' \cup R'$, ktorej patrí vrchol u a jej vzdialenosť od v je menšia, ako vzdialenosť C od v, čo je v spore s výberom kružnice C, pozri Obr. 9b. Tým je dôkaz ukončený. $\square$



(a) (b)

Obr. 9

6.2 Štruktúra 3-súvislých grafov

Lema 6.6. *Ak G je 3-súvislý a $|V(G)| > 4$, tak G obsahuje hranu e, takú, že G/e je tiež 3-súvislý.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že graf G po kontrakcii ľubovoľnej hrany má súvislosť menšiu ako 3. Potom pre každú hranu $xy \in E(G)$, graf G/xy obsahuje oddeľovač S s najviac dvoma vrcholmi. Keďže $\kappa(G) \geq 3$, vrchol v_{xy}, ktorý vznikol kontrakciou leží v oddeľovači S a $|S| = 2$. Preto graf G/xy obsahuje vrchol z rôzny od v_{xy} taký že $\{v_{xy}, z\}$ je oddeľovač v G/xy. Potom ale ľubovoľné dva vrcholy v G/xy, ktoré sú oddelené oddeľovačom $\{v_{xy}, z\}$ sú oddeľované v G množinou $T = \{x, y, z\}$. Čiže nahliadli sme, že

(1) pre každú hranu xy grafu G existuje vrchol z taký, že $\{x, y, z\}$ je oddeľovač v G.

Keďže G má súvislosť aspoň 3, žiadna vlastná podmnožina množiny oddeľovača mohutnosti 3 nie je oddeľovačom v G, a teda

(2) každý vrchol ľubovoľného oddeľovača T mohutnosti 3 má suseda v každom komponente grafu $G - T$.

Vyberieme si hranu xy, vrchol z a komponent C grafu $G - \{x, y, z\}$ tak, že $|V(C)|$ je najmenší možný. Vyberieme suseda v vrchola z v C, podľa (2) existuje. Podľa (1) existuje vrchol $w \in V(G)$ taký, že $\{z, v, w\}$ je oddeľovačom v G a ako predtým, každý vrchol z množiny $\{z, v, w\}$ má suseda v každom komponente grafu $G - \{z, v, w\}$.

Keďže x a y sú susedné, existuje komponent D grafu $G - \{z, v, w\}$ taký, že $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Teda D neobsahuje žiaden z vrcholov x, y, z, v, w. Vrchol v musí mať suseda v D (inak spor s (2)). Z toho vyplýva, že $D \subseteq C$, ale keďže $v \notin D$ a $v \in C$, komponent D je menší, ako C – spor s minimalitou C. $\square$

♣ Kde sme v predchádzajúcom dôkaze využili, že $|V(G)| > 4$?

Veta 6.7 (Tutte [30], 1961)**.** *Graf G je 3-súvislý práve vtedy, keď existuje postupnosť $G_0, \ldots, G_n$ grafov s nasledujúcimi vlastnosťami:*
(i) $G_0 = K_4$ *a* $G_n = G$
(ii) G_{i+1} *má hranu xy takú, že* $d(x), d(y) \geq 3$ *a* $G_i = G_{i+1}/xy$ *pre všetky* $i < n$*.*

Dôkaz. ($\Rightarrow$) Ak G je 3-súvislý, tak taká postupnoť existuje podľa predchádzajúcej lemy.

($\Leftarrow$) Nech $G_0, G_1, \ldots, G_n$ je postupnosť ako je uvedené. Ukážeme, že ak G_i je 3-súvislý, tak aj G_{i+1} je 3-súvislý, pre $i < n$. Predpokladajme sporom, že G_i je 3-súvislý a G_{i+1} nie je. Nech S je oddeľovač v G_{i+1}, ktorý má najviac dva vrcholy a nech C_1 a C_2 sú dva komponenty grafu $G_{i+1} - S$. Keďže x a y sú susedné, môžeme predpokladať, že $\{x, y\} \cap C_1 = \emptyset$. Potom C_2 nemôže obsahovať oba vrcholy x a y – inak by S bol oddeľovač v G_i. Takisto, C_2 nemôže obsahovať vrchol rôzny od x a y. Teda C_2 obsahuje jediný vrchol, x alebo y, stupeň tohto vrchola je najviac 2 – spor s $d(x), d(y) \geq 3$. $\square$

6.3 Mengerova veta

Veta 6.8 (Menger [22], 1927)**.** *Nech G je graf a nech A a B sú dve podmnožiny $V(G)$. Potom mohutnosť minimálneho A-B-oddeľovača sa rovná maximálnemu počtu dizjunktných A-B-ciest.*

Dôkaz. Je zrejmé, že dizjunktných A-B-ciest je najviac toľko, koľko je monutnosť minimálneho A-B-oddeľovača. Dokážeme opačnú nerovnosť. Budeme dokazovať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán. Ak $|E(G)| = 0$, tak $A \cap B$ je minimálny vrcholový oddeľovač a zároveň tieto vrcholy sú triviálnymi A-B-cestami.

Predpokladajme teda, že $e = xy$ je hrana v grafe G, označme $H := G - e$. Nech k je mohutnosť minimálneho A-B-oddeľovača v G. Nech S je A-B-oddeľovač v H minimálnej mohutnosti. Ak $|S| = k$, tak podľa indukčného predpokladu v H existuje k dizjunktných A-B-ciest a teda aj v G existuje k dizjunktných A-B-ciest.

Predpokladajme preto, že $|S| < k$. Potom $P = S \cup \{x\}$ a $Q = S \cup \{y\}$ sú A-B-oddeľovače v G, z čoho vyplýva

$$|S \cup \{x\}| = |S \cup \{y\}| \geq k$$

a preto $|S| = k - 1$. V grafe $G - S$ musí existovať aspoň jedna A-B-cesta R a R vedie cez e. Nech hrana e je v R prechádzaná v smere xy.

Každý A-P-oddeľovač v H je A-B-oddeľovačom v G. Preto minimálna veľkosť A-P-oddeľovača v H je aspoň k a teda existuje množina k vrcholovo dizjunktných A-P-ciest v H. Podobne existuje množina k vrcholovo dizjunktných B-Q-ciest. Keďže P a Q sú A-B-oddeľovače, tieto dva systémy ciest majú prienik len v S a tieto cesty spolu s hranou e tvoria množinu k vrcholovo dizjunktných A-B-ciest v G. $\square$

- Množina a-B-ciest tvorí sa volá *a-B-vejár* ak ľubovoľná dvojica ciest má spoločné iba a.

Dôsledok 6.9. *Pre $B \subseteq V(G)$ a $a \in V(G) - B$, minimálny počet vrcholov rôznych od a oddeľujúcich a od B sa rovná maximálnemu počtu ciest, ktoré tvoria a-B-vejár v G.*

Dôkaz. Aplikujeme Mengerovu vetu na $A = N(a)$ a B. □

Dôsledok 6.10. *Nech a a b sú dva rôzne vrcholy grafu G.*

(i) *Ak $ab \notin E(G)$ tak minimálny počet vrcholov rôznych od a a b, ktoré oddeľujú a od b sa rovná maximálnemu počtu nezávislých a-b-ciest v G.*

(ii) *Minimálny počet hrán separujúcich a od b v G sa rovná maximálnemu počtu hranovo dizjunktných a-b-ciest v G.*

Dôkaz. (i) Aplikujeme Mengerovu vetu na $A = N(a)$ a $B = N(b)$.
(ii) Aplikujeme Mengerovu vetu na $L(G)$ pričom $A = E(a)$ a $B = E(b)$. □

Veta 6.11 (Globálna verzia Mengerovej vety)**.** *(i) Graf je k-súvislý práve vtedy, keď pre ľubovoľné dva vrcholy u a v existuje k vnútorne dizjunktných u-v-ciest.*
(ii) Graf je hranovo k-súvislý práve vtedy, keď pre ľubovoľné dva vrcholy u a v existuje k hranovo dizjunktných u-v-ciest.

Dôkaz. (i) ($\Leftarrow$) Ak G obsahuje k nezávislých ciest medzi ľubovoľnou dvojicou vrcholov, tak $V(G) > k$ a G nemôže mať oddeľovač s menej ako k vrcholmi.
($\Rightarrow$) Predpokladajme, že G je k-súvislý. Nech a a b sú ľubovoľné dva vrcholy. Ak a a b sú nesusedné, tak podľa predchádzajúceho dôsledku (i) existuje aspoň k nezávislých a-b-ciest v G. Predpokladajme teda, že $ab \in E(G)$. Sporom predpokladajme, že neexistuje k nezávislých a-b-ciest. Nech $G' = G - ab$. Potom G' obsahuje najviac $k-2$ vnútorne nezávislých a-b-ciest. Podľa predchadzajúceho dôsledku (i) v grafe G' existuje a-b-odddeľovač X, ktorý má najviac $k-2$ vrcholov. Keďže $|V(G)| > k$, existuje v G vrchol v, ktorý nepatrí do $X \cup \{a, b\}$. Oddeľovač X oddeľuje v G' vrchol v od jedného z vrcholov a a b, povedzme od a. Ale potom $X \cup b$ oddeľuje a od v a má menej ako k vrcholov, spor s k-súvislosťou grafu G.
(ii) Priamo vyplýva z (ii) predchádzajúceho dôsledku. □

6.4 Disjunktné kostry v grafe

7 Párenia

- Dve hrany sú *nezávislé* ak množiny ich koncových vrcholov sú dizjunktné.
- *párenie (matching)* je množina hrán, ktoré sú po dvoch nezávislé
- *k-faktor* je k-regulárny faktor
- Nech M je párenie v grafe G. Cestu v G nazveme *striedavá*, ak začína vo vrchole nepokrytom hranou z M a potom obsahuje striedavo hrany z $E(G) - M$ a M. Striedavá cesta, ktorá končí nepokrytým vrcholom sa nazýva *zväčšujúca*.

Párenie v grafe nazveme *maximálne*, keď má maximálny možný počet hrán.

♣ Nájdete graf a v ňom párenie, ktoré je nerozšíriteľné, a pritom nie je maximálne. (Pod nerozšíriteľným párením myslíme také párenie M grafu G, v ktorom pre ľubovoľnú hranu z $E(G) - M$, množina hrán $M \cup \{e\}$ nie je párením.)

Veta 7.1 (Berge [1], 1957)**.** *Párenie M v grafe G je maximálne práve vtedy, keď neexistuje zväčšujúca cesta v G.*

Dôkaz. ($\Rightarrow$) zjavné

($\Leftarrow$) Sporom predpokladajme, ze v grafe G neexistuje zväčšujúca cesta a M nie je maximálne. Nech N je nejaké maximálne párenie. Komponenty grafu $M \cup N$ sú
a) hrany patriace $M \cap N$
b) cesty, na ktorých sú hrany striedavo z M a z N
c) párne kružnice, na ktorých sú hrany striedavo z M a z N

Keďže $|N| > |M|$, musí medzi komponentami existovať komponent typu b), ktorý začína aj končí hranou z N. To je ale zároveň zväčšujúca cesta vzhľadom na M, spor. □

7.1 Párenia v bipartitných grafoch

Lema 7.2 (König [17],1931)**.** *V bipartitnom grafe sa mohutnosť maximálneho párenia a mohutnosť minimálneho vrcholového pokrytia rovnajú.*

Dôkaz. Zjavne $\leq$.
Nech G je bipartitný graf s bipartíciou $A \cup B$. Nech M je maximálne párenie (párenie maximálnej mohutnosti) v G. Zostojíme množinu vrcholov U tak, že z každej hrany a_ib_i z M dáme do U jeden koncový vrcholol podľa nasledovného pravidla:

ak existuje striedavá cesta, ktorá začína v A a končí v b_i, do U dáme b_i, inak a_i.

Ukážeme, že množina U je vrcholovým pokrytím.

Všetky hrany z M sú pokryté vrcholom z U. Predpokladajme teda, $ab \notin M$. Keďže M je maximálne párenie, aspoň jeden z vrcholov a a b je pokrytý hranou z M.

- ak b je pokrytý hranou z M ... tak vrchol b patrí do U, lebo ab je striedavá cesta, ktorá začína v A
- ak a je pokrytý hranou ab' z M ...
  - ak $a \in U$, ok hrana ab je pokrytá
  - ak $a \notin U$, tak $b' \in U$ a vo vrchole b' končí nejaká striedavá cesta P, ktorá začína v A. Ale potom existuje striedavá cesta P', ktorá začína v A a končí v b (ak $b \in P$, tak $P' = P[*, b]$, inak $P' = Pb'ab$). Keďže ale M je maximálne, cesta P' nemôže byt zväčšujúca, a teda vrchol b musí byť pokrytý hranou z M a teda $b \in U$

□

♣ Nahliadnite, že v predchádzajúcej leme predpoklad bipartitnosti nemožno vynechať.

Predchádzajúcu lema je taktiež dôsledkom tvrdenia Egeváryho [5], ktoré bolo dokázané nezávisle vo všeobecnejšom prípade ohodnotených grafov.

- dedinské svadby
- nutná podmienka $|N(S)| \geq |S|$ pre všetky $S \subseteq A$

- oncis (obvious necessary condition is sufficient)

Veta 7.3 (Hall [11], 1935)**.** *Bipartitný graf G obsahuje párenie, ktoré pokrýva množinu A práve vtedy, keď $|N(S)| \geq |S|$ pre všetky $S \subseteq A$.*

Dôkaz. Nech G je bipartitný graf s bipartíciou $A \cup B$. Implikácia $\Rightarrow$ je zrejmá. Sporom predpokladajme, že $|N(S)| \geq |S|$ pre všetky $S \subseteq A$ a G neobsahuje párenie, ktoré pokrýva celú množinu A. Podľa Königovej lemy existuje v G vrcholové pokrytie s mohutnosťou menšou ako $|A|$. Nech U je také pokrytie. Položme $A' := A \cap U$ a $B' := B \cap U$. Platí

$$|A'| + |B'| = |U| < |A|$$

Keďže U je vrcholové pokrytie, nie sú hrany medzi $A - A'$ a $B - B'$. Teda platí:

$$|N(A - A')| \leq |B'| < |A| - |A'| = |A - A'|$$

a teda podmienka $|N(S)| \geq |S|$ pre všetky $S \subseteq A$ je porušená pre $S = A - A'$. □

Faktorizácia je rozklad hranovej množiny grafu na 1-faktory.

Dôsledok 7.4. *Každý k-regulárny bipartitný graf s $k \geq 1$ má 1-faktorizáciu.*

Dôkaz. Stačí ukázať, že každý k-regulárny bipartitný graf s $k \geq 1$ má 1-faktor. Keďže v regulárnom bipartitnom grafe platí, že $|A| = |B|$, stačí overiť, že $|N(S)| \geq |S|$ pre všetky $S \subseteq A$. Pre pevnú množinu S platí, že z nej odchádza $k.|S|$ hrán, každá z nich je medzi $k.|N(S)|$, incidentnými s $N(S)$. Teda platí $k|S| \leq k|N(S)|$ pre každú $S \subseteq A$. □

Dôsledok 7.5 (Petersen [24], 1891)**.** *Každý regulárny graf párneho stupňa má 2-faktorizáciu.*

Dôkaz. Ukážeme, že G má 2-faktor. Nech G je $2k$-regulárny graf. Bez ujmy na všobecnosti môžeme predpokladať, že G je súvislý. Graf G má všetky vrcholy párneho stupňa, a teda obsahuje eulerovský ťah $v_0 e_0 \dots e_{l-1} v_l = v_0$. Vytvoríme nový graf G', ktorý pre každý vrchol v_i bude obsahovať dvojicu vrcholov v_i^+ a v_i^- a za každú hranu $e_i = v_i v_{i+1}$ hranu $e_i = v_i^+ v_{i+1}^-$. Graf G' je k-regulárny a bipartitný, podľa predchádzajúceho dôsledku obsahuje 1-faktor. Tomuto 1-faktoru zodpovedá v G 2-faktor. □

7.2 Párenia vo všeobecných grafoch

- $q(G)$ – počet nepárnych komponentov grafu G (počet komponentov grafu G s nepárnym počtom vrcholov)

- ak G má 1-faktor, tak (Tuttova podmienka)

$$q(G - S) \leq |S| \qquad \text{pre všetky } S \subseteq V(G)$$

- ONCIS (obvious necessary condition is sufficient)

Veta 7.6 (Tutte [29], 1947)**.** *Graf G má 1-faktor práve vtedy, keď $q(G - S) \leq |S|$ pre všetky $S \subseteq V(G)$.*

Dôkaz. Implikácia ($\Rightarrow$) je zjavná. Pre dôkaz implikácie ($\Leftarrow$) sporom predpokladajme, že existuje graf G, v ktorom platí $q(G-S) \leq |S|$ pre všetky $S \subseteq V(G)$, a G nemá 1-faktor.

Pridávajme do G hrany kým sa dá, aby graf nemal 1-faktor. Výsledný graf označme H. Graf H teda nemá 1-faktor, ale pre všetky množiny S jeho vrcholov platí $q(H-S) \leq |S|$, pretože pridanie hrany do grafu nezväčší počet nepárnych komponentov.

Nech R je množina vrcholov grafu H, ktoré sú susedné so všetkými vrcholmi grafu. Ukážeme, že R je množina vrcholov taká, že:

Všetky komponenty grafu $H - R$ sú komplentné grafy a každý vrchol $r \in R$ je susedný so všetkými ostatnými vrcholmi grafu H. (*)

Ak R nespĺňa (*), tak v niektorom komponente grafu $H - R$ je dvojica nesusedných vrcholov, povedzme a a a'. Nech a, b, c sú prvé tri vrcholy na najkratšej a-a'-ceste v tomto komponente (môže sa stať, že $c = a'$), potom ab, bc patria E, ale ac nepatrí E. Keďže $b \notin R$, existuje $d \in V$ také, že $bd \notin E$. Z maximality grafu G vyplýva, že graf $H + ac$ obsahuje 1-faktor, povedzme M_1, a graf $H + bd$ obsahuje 1-faktor, povedzme M_2.

Nech $P = d \dots v$ je maximálna cesta v H, ktorá začína v d hranou z M_1 a obsahuje striedavo hrany z M_1 a M_2. Táto cesta skončí v a, c alebo b. Ak skončí v b, tak Pbd je kružnica párnej dĺžky v $H + bd$, v ktorej každá druhá hrana patrí M_2. Zmeňme M_2 na M_2' tak, že na Pbd dáme do M_2' práve tie hrany, ktoré nepatrili M_2, ostatné hrany zachováme. Množina hrán M_2' tvorí 1-faktor v H – spor. Ak P skončí v a, tak M_2' vytvoríme z M_2 tak, že na kružnici $Pabd$ dáme do M_2' práve tie hrany, ktoré nepatrili M_2, ostatné hrany zachováme. Opäť, M_2' tvorí 1-faktor v H – spor. Obdobne riešime prípad, že P končí v c. Takže R je množina vrcholov grafu H spĺňajúca podmienku (*).

Ak H má nepárny počet vrcholov, tak podmienka $q(H-S) \leq |S|$ neplatí pre prázdnu množinu, čo je spor. Budeme teda predpokladať, že H má párny počet vrcholov. Zo štruktúry grafu H sa dá odvodiť, že H má 1-faktor, opäť spor. Zostáva nahliadnuť, že množina vrcholov SR s danými vlastnosťami existuje. Tým je dôkaz ukončený.

□

Dôsledok 7.7 (Petersen [24], 1891)**.** *Každý bezmostový kubický graf má 1-faktor.*

Dôkaz. Ukážeme, že každý bezmostový kubický graf G spĺňa Tuttovu podmienku. Nech $S \subseteq V(G)$ a nech C je nepárny komponent grafu $G - S$. V grafe G je nepárny počet S-C-hrán a teda aspoň 3, keďže G je bezmostový. Celkový počet hrán medzi S a $G - S$ je teda aspoň $3q(G-S)$. Ale tiež je to najviac $3|S|$, keďže G je kubický. Preto $q(G-S) \leq S$. □

8 Planárne grafy

- graf sa nazýva *planárny* ak sa dá nakresliť v rovine tak, že hrany majú prienik iba na ich koncoch
- $K_5 - e$ je planárny

Veta 8.1 (Jordanova veta)**.** *Každá jednoduchá uzavretá krivka rozdeľuje zvyšok roviny na dve disjunktné lineárne súvislé otvorené množiny.*

- lineárne súvislá množina – ľubovoľné jej dva body sa dajú spojiť krivkou, ktorá celá leží vnútri množiny

- *jednoduchá* krivka – nepretína samu seba
- ľubovoľný graf, ktorý dostaneme z grafu G postupnosťou subdivízií hrán sa nazýva *subdivízia grafu G*

Tvrdenie 8.2. *Graf G je planárny práve vtedy, keď každá subdivízia grafu G je planárna.*

- stereografická projekcia

Veta 8.3. *Graf je vnoriteľný do roviny práve vtedy, keď je vnoriteľný do sféry.*

- Rovinný graf rozdelí rovinu na lineárne súvislé otvorené množiny. Tieto množiny sa volajú *oblasti*.
- Každý rovinný graf má práve jednu neohraničenú oblasť, ktorú voláme *vonkajšia oblasť*.

Tvrdenie 8.4. *Nech G je planárny graf a nech f je oblasť v nejakom jeho planárnom nakreslení. Potom G má rovinné nakreslenie také, ktorého vonkajšia oblasť má rovnakú hranicu ako f.*

- *duálny graf* TO DO

Veta 8.5 (Eulerova formula)**.** *Pre každý súvislý rovinný graf G platí*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán.
Ak G je strom, tak $|V(G)| = |E(G)| + 1$ a $|F(G)| = 1$, a tvrdenie platí.

Inak, ak G nie je strom, zoberme hranu $e \in G$, ktorá leží na kružnici. Nech $G' = G - e$. Potom G' je súvislý rovinný graf, $E(G') = E(G) - 1$, $V(G)' = V(G)$ a $F(G') = F(G) - 1$. Z indukčného predpokladu, $|V(G')| - |E(G') + |F(G')| = 2$ a teda aj $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$. □

Dôsledok 8.6. *Každé planárne vnorenie súvislého planárneho grafu má rovnaký počet oblastí.*

Dôsledok 8.7. *Nech G je planárny graf s aspoň tromi vrcholmi. Potom*
(a) $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ *a* $|E(G)| = 3|V(G)| - 6$ *práve vtedy, keď každé planárne vnorenie grafu G je triangulácia,*
(b) *ak G nemá trojuholníky, tak* $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

Dôkaz. (a) $2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} d(f) \geq 3|F(G)| = 3(|E(G)| - |V(G)| + 2)$
$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$
(b) $2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} d(f) \geq 4|F(G)| = 4(|E(G)| - |V(G)| + 2)$
$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$

□

Dôsledok 8.8. *Každý planárny graf má vrchol stupňa najviac* 5.

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že v planárnom grafe G sú všetky vrcholy stupňa aspoň 6. Potom $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6|V(G)|$ a teda $|E(G)| \geq 3|V(G)|$, spor. □

Dôsledok 8.9. *Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú planárne.*

Dôkaz. Sporom predpokladáme, že sú planárne a z počtu vrcholov a hrán odvodíme spor. □

Tvrdenie 8.10. *Rovinný graf má všetky oblasti ohraničené kružnicami práve vtedy, keď je 2-súvislý.*

Dôkaz. ($\Leftarrow$) Nech nejaká oblasť F roviného vnorenia nie je ohraničená kružnicou, ale nejakým iným uzavretým sledom. Potom istý vrchol v na hranici oblasti F sa vyskytuje (aspoň) dvakrát. Postupujeme po hranici od prvého po druhý výskyt vrcholu v a vnutri F v blizkosti hranice vnorme jednoduchú krivku C začínajúcu sa v prvom výskyte vrcholu v a končiacu v druhom výskyte. Potom C je jednoduchá uzavretá krivka. Nech u je vrchol na hranici oblasti F bezprostredne predchádzajúci vrcholu v a nech w je vrchol bezprostredne nasledujúci. Potom C pretína graf G len vo vrchole v pričom u a w sú v rôznych oblastiach roviny vytvorených krivkou C. Preto v je artikulácia. (slučky!)

($\Rightarrow$) Sporom, nech v je artikulácia. Potom G sa dá vyjadriť ako $G = H \cup K$, pričom $H \cap K = \{v\}$. Zvoľme si dostatočne malú kružnicu D so stredom vo v. Potom D pretína hrany incidentné s v jednak patriace do H a jednak do K. Ako postupujeme po D musí nastať situácia, že za hranou z h z H nasleduje hrana k z K. Uvažujeme oblasť F', ktorá má roh vo v ohraničený hranami h a k. Keďže h leží v H a v je artikulácia, úsek hranice oblasti F' začínajuci sa vo v a pokračujúci hranou h leží celý v H až po ďalší výskyt vrcholu v. Keďže hrana k sa nikde na tejto hranici nevyskytuje, hranica pokračuje ďalej. Teda vrchol v je viacnásobný – teda oblasť F' nie je ohraničená kružnicou. □

Lema 8.11. *Graf je planárny, práve vtedy, keď každý jeho blok je planárny.*

Dôkaz. Tvrdenie sa dá ľahko dokázať matematickou indukciou vyhľadom na počet blokov. □

Veta 8.12 (Kuratowski [18], 1930)**.** *Graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje subdivíziu K_5 ani $K_{3,3}$.*

Dôkaz. Podľa Dôsledku 8.9 grafy K_5 ani $K_{3,3}$ a teda ani ich subdivízie nie sú planárne, preto tvrdenie ($\Rightarrow$) platí.

Dokážme teraz implikáciu ($\Leftarrow$). Nech G je najmenší protipríklad. Podľa Lemy 8.11 graf G nemá artikuláciu. Ak by mal 2-rez. Vytvoríme dva grafy G_1 a G_2 (aaa), ktoré neobsahujú subdivíziu K_5 ani $K_{3,3}$. Takže sú planárne a majú také vnorenie do roviny, ktoré má vrcholy x a y na hranici vonkajšej oblasti. Spojením dostávame vnorenie grafu G do roviny, teda G nemôže byť najmenším protipríkladom a teda tvrdenie platí.

Môžme teda predpokladať, že G je 3-súvislý, a teda má aspoň štyri vrcholy. Ak $|V(G)| = 4$, tak je planárny a tvrdenie platí. Inak podľa Lemy 6.6 existuje hrana $e \in G$ taká, že G/e je tiež 3-súvislý.

Nahliadneme najprv, že graf G/e neobsahuje subdivíziu grafu K_5 ani $K_{3,3}$. Platí totiž, že ak by G/e obsahoval subdivíziu daných grafov, tak aj G obsahuje subdivíziu K_5 alebo $K_{3,3}$ (aaa).

Graf G/e je podľa indukčného predpokladu planárny. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že vrchol v vzniknutý kontrakciou hrany e leží na hranici vonkajšej oblasti (každá oblasť môže byť vonkajšia; stereografická projekcia na sfére). Utvorme graf

$G/e - v$. Tento je iste 2-súvislý, teda podľa jedného z predošlých tvrdení vonkajšia oblasť je kružnica. Roztiahnime späť vrchol v. Nech $e = xy$ a nech $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sú susedia vrcholu x rôzny od y v cyklickom poradi ako sa objavujú na hranici vonkajšej oblasti a nech $y_1, y_2, \ldots, y_l$ sú susedia vrcholu y rôzny od x. Nech $P_{i,i+1}$ je cesta, ktorá leží na hranici vonkajšej oblasti ohraničená vrcholmi x_i a x_{i+1} (čiže cesty sa prenikajú v koncových vrcholoch).

Predpokladajme najprv, že y_m pre nejaké m je vnútotrným vrcholom niektorej z ciest $P_{i,i+1}$, povedzme cesty $P_{1,2}$. Potom všetky y_j ležia na ceste $P_{i,i+1}$ (vrátane jej koncových vrcholov). Ak by totiž nejaký vrchol y_z ležal mimo $P_{1,2}$, vrcholy x, y, x_1, x_2, y_m, y_z by boli vrcholmi subdivízie $K_{3,3}$. Teda všetci susedia vrcholu y okrem vrcholu x ležia na $P_{1,2}$ a G je planárny.

Predpokladajme teraz, že každý y_m je totožný s niektorým zo susedov vrcholu x rôznym od y. Ak y má dvoch susedov rôznych od x, tak ak susedia vrcholu y sú dva následné vrcholy x_i a x_{i+1}, tak G je planárny, inak obsahuje subdivíziu $K_{3,3}$. Ak y má aspoň troch susedov rôznych od x, tak obsahuje subdivíziu K_5. To ukončuje dôkaz pre 3-súvislé grafy. $\square$

9 Farbenia grafov

- *vrcholové farbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : V \to S$, prvkom množiny S hovoríme aj farby
- *vrcholové k-farbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$
- *hranové k-farbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$
- *regulárne* farbenie – susedné objekty majú rôzne farby
- graf je (vrcholovo/hranovo) k-zafarbiteľný ak má vrcholové/hranové k-zafarbenie
- *chromatické číslo* $\chi(G)$ je najmenšie k také, že G má (vrcholové) k-farbenie
- *chromatické index* $\chi'(G)$ je najmenšie k také, že G má hranové k-farbenie

9.1 Vrcholové farbenia

Tvrdenie 9.1. *Každý graf G s m hranami spĺňa*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{(2m + \frac{1}{4})}.$$

Dôkaz. Medzi každou dvojicou farebných tried musí byť hrana. $\square$

- *greedy algoritmus* – vrcholy farbíme postupne najmenšou prípustnou farbou – dostávame odhad $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

♣ Dokážte, že rozdiel $\Delta(G) - \chi(G)$ môže byť ľubovoľne veľký.

♣ Nech G je súvislý graf, ktorý nie je regulárny. Za akých podmienok viete dokázať, že $\chi(G) \leq \Delta(G)$?

Tvrdenie 9.2. *Každý graf G spĺňa*

$$\chi(G) \leq \max\{\delta(H) | H \subseteq G\} + 1.$$

Lema 9.3 (Lovász, 1975)**.** *Nech G je 2-súvislý graf, ktorý nie je kompletný a nech $\Delta(G) \geq 3$. Potom G obsahuje indukovanú cestu dĺžky 2, povedzme axb takú, že $G - \{a, b\}$ je súvislý.*

Dôkaz. Ak graf G obsahuje vrchol v susedný so všetkými ostatnými, vyberieme a a b ako dvojicu nesusedných vrcholov z $V(G) - \{v\}$ (také vrcholy existujú pretože G nie je kompletný). Inak, nech v je ľubovoľný vrchol stupňa aspoň 3. Ak graf $G - v$ je 2-súvislý, položíme $a = v$, b bude ľubovoľný vrchol grafu G vo vzdialenosť 2 od a a x bude spoločný sused vrcholov a a b. Ak $G - v$ nie je 2-súvislý, tak jeho súvislosť je 1 – nemôže byť nesúvislý, lebo G je 2-súvislý. Pozrime sa na jeho blokovo-artikulačný graf. Vrchol v musí byť incidentný so všetkými listovými blokmi, a navyše sú aspoň dva listové bloky. Vyberme ľubovoľné dva listové bloky incidentné s v a vyberme suseda a vrcholu v v prvom listovom bloku a suseda b vrcholu v v druhom listovom bloku a položme $x = v$. Zjavne vrcholy a a b sú nesusedné. □

Veta 9.4 (Brooks [2], 1941)**.** *Nech G je súvislý graf. Ak G nie je kompletný graf ani nepárna kružnica, tak*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Dôkaz. Zoberme najmenší protipríklad G. Zjavne G je 2-súvislý. Ľahko overíme, ak $\Delta(G) \leq 2$. Nech $\Delta(G) \geq 3$. Nech $a, b, x \in V(G)$ sú vrcholy podľa predchadzajúcej lemy. Nech $|V(G)| = n$. Usporiadame vrcholy grafu G do postupnosti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že každý v_i s $i < n$ má suseda v_j, kde $j > i$ nasledovne. Položíme $v_1 = a$, $v_2 = b$ a $v_n = x$ a nech $G' = G - \{a, b\}$. Graf G' je súvislý. Ďalej zvolíme v_{n-1} vrchol grafu G' susedný s v_n, vrchol v_{n-2} vrchol grafu G' susedný s niektorým z vrcholov v_n a v_{n-1} atď. Ideme farbiť – vrcholy farbíme v poradí $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Vrcholom v_1 a v_2 priradíme rovnakú farbu. Postupne farbíme $v_3, \ldots, v_{n-1}$, použijeme vždy prvú voľnú farbu, pričom keďže každý z týchto vrcholov má nezafarbeného suseda, použijeme najviac $\Delta(G)$ farieb. Vrchol v_n môže mať zafarbených $\Delta(G)$ susedov, ale dva z nich (v_1 a v_2) sú zafarbené rovnakou farbou, takže dofarbíme aj v_n a nepoužijeme viac ako $\Delta(G)$ farieb. □

Autorom dôkazu Brooksovej vety, ktorý tu uvádzame je Lovász [20]. Viacero alternatívnych dôkazov sa nachádza v práci Cranstona a Raberna [3].

- *klikové číslo $\omega(G)$*
- *číslo nezávislosti $\alpha(G)$*

Tvrdenie 9.5. *Pre každý graf G platí, že $\chi(G) \geq \omega(G)$ a $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.*

Príklad 9.6. *Existujú grafy, kde $\chi(G) > \omega(G)$. Nech G_s je graf C_5 plus K_s. Potom $\omega(G_s) = s + 2$ a $\chi(G_s) = s + 3$.*

- *Mycielského konštrukcia* vytvorí z jednoduchého grafu G nový graf G'. Nech $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Položme $V(G') = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n, w\}$ a $E(G') = E(G) \cup \{u_i v_j | v_i v_j \in E(G)\} \cup \{u_i w | 1 \leq i \leq n\}$.

Tvrdenie 9.7 (Mycielski [23], 1955). *Mycielského konštrukcia vytvorí z grafu G bez trojuholnikov s $\chi(G) = k$, graf G' bez trojuholníkov s $\chi(G') = k + 1$.*

Dôkaz. Ak je G bez trojuholníkov, tak zjavne aj G' neobsahuje trojuholníky.

Pre chormatické číslo $\chi(G')$ zrejme platí $\chi(G') \leq k+1$ – zoberieme nejaké k-zafarbenie grafu G a vrchol u_i zafarbíme rovnakou farbou ako je vrchol v_i a vrcholu w priradíme farbu $k + 1$.

Dokážeme teraz, že $\chi(G') \geq k + 1$. Sporom predpokladajme, že $\chi(G') = k$. Zoberme také zafarbenie c grafu G', že $c(w) = k$. Prerobme c na c' tak, že c' sa líši od c iba na vrcholoch v_i takých, že $c(v_i) = k$; takým vrcholom priraďme $c'(v_i) = c'(u_i)$. Nie je ťažké overiť, že ak je regulárne k-farbenie grafu G', tak aj c' je také. Navyše c' farbi podgraf G grafu G' s použitím najviac $k - 1$ farieb, čo je v spore s tým, že $\chi(G) = k$. □

S použitím náhodných grafov Erdös dokázal nasledujúcu vetu.

Veta 9.8. *Pre každé celé číslo k existuje graf G s obvodom väčším ako k a chromatickým číslom väčším ako k.*

9.2 Farbenia planárnych grafov

Problém štyroch farieb. *Dokážte, že oblasti ľubovoľného rovinného grafu bez mostov možno zafarbiť najviac štyrmi farbami tak, aby susedné oblasti (tie, čo majú spoločnú hranu na hranici) boli zafarbené rôzne.*

z duality vyplýva ekvivalentná formulácia Problému štyroch farieb:

Pre každý rovinný graf G (bez slučiek) platí $\chi(G) \leq 4$.

história

- 1852 - najstaršia známa zmienka: Francis Guthrie položil svojmu bratovi Frederikovi túto otázku
- 1878 - Cayley prezentoval tento problém Londýnskej Matematickej Spoločnosti
- 1878 - Taitov nesprávny "dôkaz"
- 1879 - Kempe publikoval nesprávny "dôkaz"
- 1890 - Heawood modifikoval Kempeho "dôkaz"na dôkaz vety o piatich farbách
- 1977 - prvý všeobecne akceptovaný dôkaz Appel and Haken
  Náčrt dôkazu: A&H najprv ukázali, že každá planárna triangulácia musí obsahovať jednu z 1482 *nevyhnutných konfigurácií*. V druhom kroku s použitím počítača dokázali, že každá z týchto konfigurácií je *reducibliná*, to znamená každá planárna triangulácia, ktorá obsahje takúto konfiguráciu sa dá zafarbiť 4mi farbami za predpokladu, že sa dajú zafarbiť všetky menšie. Pomocou týchto dvoch krokov sa dá induktívne dokázať, že každá rovinná triangulácia a teda aj každý rovinný graf bez slučiek je 4-zafarbiteľný.

♣ Dokážte, že $\chi(G) \leq 6$ pre kazdý planárny graf G.

Veta 9.9 (Tait, 1878)**.** *Problém štyroch farieb je ekvivalentý s tvrdením, že pre každý kubický planárny graf G bez mostov platí $\chi'(G) = 3$.*

Dôkaz. ($\Rightarrow$) Vnoríme kubický graf do roviny. Zafarbíme oblasti štyrmi farbami zo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Každej hrane kubického grafu priradíme farbu, ktorá je súčtom farieb na oblastiach, na ktorých hranici leží. Zjavne na každej hrane bude nenulová farba zo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Predpokladajme, že oblasti pri nejakom vrchole v boli zafarbené tromi farbami α, β, γ. Potom farby hrán incidentých s v budú $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ a $\gamma + \alpha$. To znamená, že súčet farieb na týchto hranách je $(0, 0)$. Ľahko sa dá nahliadnuť, že súčet troch nenulových prvkov zo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ je $(0, 0)$ práve vtedy, keď sú tieto prvky po dvoch rôzne, a tada aj farby hrán okolo v budú rôzne.

($\Leftarrow$) Majme planárny bezmostový graf H. Keďže H je bezmostový, nemá vrcholy stupňa 1. Vytorme z grafu H graf H' tak, že vrcholy stupňa 2 vyhladíme a každý jeho vrchol so stupňom k väčším ako 3 nafúkneme na kružnicu s k vrcholmi tak, aby graf H' bol planárny. Graf H' je kubický, a teda podľa predpokladu má hranové 3-zafarbenie. Zafarbime jednu z jeho oblasti. Rožširujme farbenie postupne na ďalšie oblasti tak, že hrana bude mať farbu, ktorá je súčtom farieb obastí, na hranici ktorých leží. Tokový argument nám zaručí, že nenastane spor. □

Tait si myslel, že každý kubický graf je hranovo 3-zafarbiteľný, a teda si myslel, že dokázal Vetu o štyroch farbách. Protipríklad Kempe – Petersenov graf.

Veta 9.10 (Heawood [12], 1890)**.** *Pre každý planárny graf G (bez slučiek) platí $\chi(G) \leq 5$.*

Dôkaz. Matematickou indukciou na počet vrcholov. Každý jednoduchý planárny graf má vrchol stupňa nanajvýš 5, povedzme v. Zafarbime graf $G - v$. Ak je farba nepoužitá na suseda v v G, dofarbíme v. Inak môžeme predpokladať, že susedia v v G sú $v_1, v_2, \ldots, v_5$ v cyklickom poradí podľa vnorenia a v_i je zafarbený farbou i. Graf indukovaný ľubovoľnými dvoma farbami je bipartitný. Ak komponent grafu $G - v$, indukovaný farbami 1 a 3 obsahujúci v_1 neobsahuje v_3, vymeníme farby v tomto komponente a vrchol v zafarbíme farbou 1. Predpokladajme teda, že komponent grafu $G - v$, indukovaný farbami 1 a 3 obsahujúci v_1 obsahuje v_3. Potom ale, keďže graf je planárny, komponent indukovaný farbami 2 a 4 obsahujúci v_2 neobsahuje v_4. Prefarbíme tento komponent a zafarbíme v farbou 2. □

Veta 9.11 (Grötzsch [9], 1959)**.** *Pre každý planárny graf G bez trojuholníkov (bez slučiek) platí $\chi(G) \leq 3$.*

9.3 Hranové farbenia

- je zrejmé, že platí $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

♣ Dokážte čo najlepší horný odhad pre $\chi'(G)$.

Veta 9.12 (König [16], 1916)**.** *Pre každý bipartitný graf G platí $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán. Ak $|E(G)| = 0$ tvrdenie platí. Majme teraz bipartitný graf G a predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky bipartitné grafy s menším počtom hrán. Vyberme $e \in E(G)$ a vytvorme graf $H := G - e$. Pre graf H platí indukčný predpoklad, a teda $\chi'(H) \leq \Delta(H)$. Keďže $\Delta(H) \leq \Delta(G)$, graf H sa dá hranovo zafarbiť farbami z množiny $\{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$. Ukážeme teraz, že po prípadnom prefarbení niektorých hrán, sa dá zafarbiť aj hrana e.

Nech $e = uv$, $u \in A$, $v \in B$, kde $A \cup B$ je bipartícia grafu H. Keďže stupeň vrchola u v grafe H je menší ako $\Delta(G)$, existuje farba, povedzme $\alpha \in \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$, ktorá nie je použitá na žiadnu z hrán incidentných s u. Obdobne, na hrany incidetné s v nie je použitá farba, povedzme β. Sledujme cestu P indukovanú hranami farby α a β, ktorá začína v u (nahliadnite, že naozaj je to cesta). Táto cesta pri prechode z A do B používa hranu farby β a pri prechode z B do A používa hranu farby α. Z toho vyplýva, P nemôže skončiť vo v. Vymeňme farby α a β na P. Dostávame nové regulárne farbenie grafu H, v ktorom v oboch vrcholoch u a v chýba farba β. Dofarbíme hranu e farbou β a tým vytvoríme regulárne $\Delta(G)$-farbenie grafu G. □

Príklad 9.13. $\chi'(Pg) = 4$ *TO DO*

Veta 9.14 (Vizing [31], 1964)**.** *Pre každý jednoduchý graf G platí*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dôkaz. Nech $\Delta = \Delta(G)$. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán. Pre grafy bez hrán tvrdenie zjavne platí. Majme teraz G s aspoň jednou hranou a predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky grafy na menšom počte hrán. Nech $e = uv_1$ je ľubovoľná hrana grafu G. Z indukčného predpokladu vieme, že graf $H = G - e$ má hranové Δ-farbenie c. Na hrany incidentné s vrcholom u je nepoužitá nejaká farba z množiny $\{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$, nech je to farba α (v skutočnosti sú tam nepoužité aspoň dve farby, za farbu α vyberieme ľubovoľnú z nich). Obdobne, vo vrchole v_1 chýba farba, nech je to β_1. Ak farba β_1 chýba aj v u, zafarbíme hranu e farbou β_1 a sme hotoví. Predpokladajme preto, že farba β_1 je v u prítomná na hrane uv_2. Vo vrchole v_2 chýba farba β_2. Týmto spôsobom vytvoríme maximálnu (t.j. nerozšíriteľnú) množinu hrán $uv_1, uv_2, \dots, uv_k$ s vlastnosťami

- vo vrchole v_i chýba farba i, pre $i \in \{1, 2, \dots, k\}$
- hrana uv_i má farbu $\beta_{i-1} \in \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$, pre $i \in \{2, 3, \dots, k\}$
- $\beta_i \neq \beta_j$ pre $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$

Sú dve možnosti, prečo túto množinu hrán nemožno rozšíriť.

(1) hrana farby β_k nie je incidentná s vrcholom u alebo

(2) platí $\beta_k = \beta_j$ pre nejaké $j \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$

Ak nastala možnosť (1), tak vytvoríme farbenie c' grafu G nasledovne.

- $c'(uv_i) = c(uv_{i+1})$ pre $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$,
- $c'(uv_k) = \beta_k$,
- $c'(e) = c(e)$ pre $e \notin \{uv_1, uv_2, \dots, uv_k\}$.

Predpokladajme teraz, že nastala možnosť (2). Sledujme nepredĺžiteľný β_k-α reťazec P, ktorý začína vo vrchole u (jeho prvá hrana je uv_{j+1}). Tento reťazec je cestou. Ak P nekončí vo v_j, tak vytvoríme farbenie d' grafu G nasledovne.

- $d(uv_i) = c(uv_{i+1})$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$,
- hrana uv_{j+1} bude vo farbení d nezafarbená
- $d(e) = c(e)$ pre $e \notin \{uv_1, uv_2, \ldots, uv_{j+1}\}$.

Následne vo farbení d vymeníme farby na α-β_k reťazci začínajúcom vo vrchole v_{j+1} a hranu uv_{j+1} zafarbíme farbou α, a tak vytvoríme farbenie d' grafu G. Zostáva uvažovať prípad, keď reťazec P končí vo v_j. Vytvoríme farbenie z' grafu G nasledovne.

- $z(uv_i) = c(uv_{i+1})$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$,
- hrana uv_k bude vo farbení z nezafarbená
- $z(e) = c(e)$ pre $e \notin \{uv_1, uv_2, \ldots, uv_k\}$.

Následne vo farbení z vymeníme farby na α-β_k reťazci začínajúcom vo vrchole v_k a hranu uv_k zafarbíme farbou α, a tak vytvoríme farbenie z' grafu G. □

Vizingova veta prirodzene rozdeľuje jednoduché grafy na dve množiny – na

- grafy, na ktorých hranové zafarbenie stačí $\Delta(G)$ farieb; tieto voláme *grafy 1. triedy*
- grafy, na ktorých hranové zafarbenie treba a stačí $\Delta(G) + 1$ farieb; tieto voláme *grafy 2. triedy*

Práve kubické grafy 2. triedy sú zaujímavé tým, že mnohé hypotézy a otvorené problémy sa dajú zredukovať na túto množinu grafov, t.j. ak by sme spomínané problémy dokázali pre kubické grafy 2. triedy, platili by všetky grafy.

Tvrdenie Vizingovej vety neplatí pre grafy s násobnými hranami. PR aaa.

Veta 9.15 (Vizing [31], 1964; Gupta [10], 1966)**.** *Ak G je multigraf, tak $\chi'(G) \le \Delta(G) + \mu(G)$.*

Veta 9.16 (Shannon [27], 1949)**.** *Ak G je multigraf, tak $\chi'(G) \le \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor$.*

9.4 Vyberateľnosť

- graf G je *k-vyberateľný* ak pre každé priradenie zoznamov prípustných farieb vrcholom grafu G také, že každý zoznam má aspoň k farieb sa dá vybrať farba pre každý vrchol z jemu prislúchajúcemu zoznamu tak, že fabrenie je regulárne. Najmenšie k také, že G je k-vyberateľný sa volá *zoznamové chromatické číslo $ch(G)$* grafu G.
- obdobne pre hrany je definované, kedy je graf *hranovo k-vyberateľný* a má *zoznamový chromatický index $ch'(G)$*
- $ch(G) \ge \chi(G)$ a $ch'(G) \ge \chi'(G)$.
- definované v roku 1976 Vizingom
- veta Brooksovho typu platí aj pre zoznamové chromatické číslo (dokázal Vizing)

- rozdiel medzi $ch(G)$ a $\chi(G)$ môže byť ľubovoľne veľký

Veta 9.17 (Thomassen [28], 1994)**.** *Každý planárny graf je* 5*-vyberateľný.*

Dôkaz. Matematickou indukciou dokážeme nasledujúce tvrdenie.

(*) *Predpokladajme, že každá vnútorná oblasť grafu G je trojuholníková a vonkajšia oblasť grafu G je kružnica $C = v_1v_2 \dots v_kv_1$. Ďalej predpokladajme, že vrchol v_1 už bol zafarbený farbou* 1 *a vrchol v_2 už bol zafarbený farbou* 2*. Predpokladajme ďalej, že každý vrchol kružnice C rôzny od v_1 a v_2 má priradený zoznam s aspoň* 3 *farbami a každý vrchol v $G - C$ má priradený zoznam s aspoň* 5 *farbami. Potom farbenie vrcholov v_1 a v_2 sa dá rozšíriť na farbenie grafu G z daných zoznamov.*

Najprv nahliadneme, že (*) implikuje tvrdenie vety. Majme ľubovoľný planárny graf spolu so zoznamami 5 farieb priradených vrcholom. Pridávajme hrany k tomuto grafu a tak vytvorme z neho maximálny planárny graf G. Zjavne G je triangulácia roviny. Nech $v_1v_2v_3v_1$ je hranica vonkajšej oblasti grafu G. Zafarbíme vrcholy v_1 a v_2 rôznymi farbami z ich zoznamov. Zo zoznamu pri vrchole v_3 odstránime tieto dve farby (ak ich obsahuje). Rozšírime toto farbenie použitím (*) na farbenie celého G z daných zoznamov.

Teraz dokážeme (*), urobíme tak matematickou indukciou vzhľadom na $|V(G)|$. Ak $|V(G)| = 3$, tak $G = C$ a tvrdenie zjavne platí. Predpokladajme, že $|V(G)| \geq 4$ a (*) platí pre všetky grafy s menším počtom vrcholov ako má G. Ak C má chordu vw, tak vw leží na dvoch kružniciach C_1 a C_2 takých, že $C_1 \cap C_2 = \{vw\}$ a $C_1 \triangle C_2 = C$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $v_1v_2 \in C_1$ a $v_1v_2 \notin C_2$. Pre $i = 1, 2$ nech G_i je podgraf grafu G indukovaný vrcholmi ležiacimi na C_i a vnútri C_i. Aplikujeme indukčný predpoklad najprv na C_1 a potom – s farbami priradenými vrcholom v a w – na C_2. Dostávame farbenie celého G z daných zoznamov.

Zostáva uvažovať prípad, že C nemá chordu. Nech $v_1u_1, \dots, u_m, v_{k-1}$ sú susedia vrcholu v_k v ich prirodzenom cyklickom poradí okolo v_k. Všetky vrcholy u_i ležia vnútri C. Keďže každá vnútorná oblasť grafu G je trojuholník, $P := v_1u_1 \dots u_mv_{k-1}$ je cesta v G a $C' := P \cup (C - v_k)$ je kružnica.

Vyberieme si teraz dve rôzne farby $j, l \neq 1$ zo zoznamu priradenému vrcholu v_k a odstránime tieto farby zo zoznamov všetkých vrcholov u_i. Potom zoznam každého vrcholu v_i pre $i \geq 3$ má aspoň 3 farby. S využitím indukčného predpokladu zafabríme vrcholy na C' a vnutri C'. Zostáva zafarbiť vrchol v_k. Aspoň jedna z farieb j, l nie je použitá na v_{k-1} ani na žiaden z vrcholov $u_1, \dots, u_m$, túto farbu priradíme vrcholu v_k a dostávame farbenie celého G z daných zoznamov. □

- [Voigt [32], 1993] skonštruovala planárny graf na 238 vrcholoch, ktorý nie je 4-vyberateľný, čiže Thomassenova zoznamová verzia vety o 5 farbách je najlepšia možná.

Hypotéza 9.18 (Hypotéza o hranovom zoznamovom farbení)**.** *Pre každý graf G platí $ch'(G) = \chi'(G)$.*

- Hypotéza o hranovom zoznamovom farbení je dokázaná pre niektoré triedy grafov, napr. bipartitné Galvin [8]. Taktiež, použitím Vety o štyroch farbách, Ellingham a Goddyn dokázali túto hypotézu pre k-regulárne hranovo k-zafarbiteľné planárne grafy [6].

TO DO: dokazat pre bipartitne grafy

10 Hamiltonovské grafy

- graf je *hamiltonovský* ak obsahuje kružnicu, ktorá prechádza všetkými jeho vrcholmi
- Sir William Rowan Hamilton [1856] popísal hru na grafe dodekahedronu, v ktorom jeden hráč určí 5-vrcholovú cestu a úlohou druhého je rozšíriť túto cestu na hamiltonovskú kružnicu

10.1 Nutná podmieka

- $c(H)$ označuje počet komponentov grafu H

Veta 10.1. *Nech G je hamiltonovský graf. Potom $c(G - S) \leq |S|$ pre všetky $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$.*

10.2 Postačujúce podmienky

Veta 10.2 (Dirac, 1952)**.** *Nech G je graf s aspoň tromi vrcholmi a $\delta(G) \geq n/2$. Potom G je hamiltonovský.*

Dôkaz. Nech $n = |V(G)|$. Sporom predpokladajme, že existuje graf G, $\delta(G) \geq n/2$ a G nie je hamiltonovský. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že G je maximálny nehamiltonovský (pridanie ľubovoľnej hrany by viedlo k hamiltonovskému grafu) – pridanie hrany nezníži minimálny stupeň.

Predpokladajme, že x a y sú dva nesusedné vrcholy v G. Z maximality grafu G vyplýva, že existuje x-y-cesta P, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu G. Nech $P = v_1 v_2 \dots v_n$, kde $v_1 = x$ a $v_n = y$. Označme $X = \{v_i | xv_{i+1} \in E(G)\}$ a $Y = \{v_i | yv_i \in E(G)\}$. Platí:

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y| = d(x) + d(y) \geq n/2 + n/2 = n$$

.

Keďže $y \notin X \cup Y$, platí $|X \cup Y| < n$. Zhrnutím dostávame $|X \cap Y| \geq 1$. Nech $v_k \in X \cap Y$ pre nejaké $k \in \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Potom $xP[xv_k]v_k yP^{-1}[yv_{k+1}]x$ je hamiltonovská kružnica v G – spor. □

Lema 10.3 (Ore, 1960)**.** *Nech G je graf a u, v sú jeho dva nesusedné vrcholy, pričom platí $d(u)+d(v) \geq |V(G)|$. Potom G je hamiltonovský práve vtedy, keď $G+uv$ je hamiltonovský.*

Dôkaz. Implikácia ($\Rightarrow$) je zrejmá. V opačnej implikácii sú argumenty obdobné ako v dôkaze Diracovej vety. □

- *hamiltonovský uzáver* grafu G, označovaný $C(G)$ je graf, ktorý vznikne z G opakovaným pridávaním hrán medzi dvojice nesusedných vrcholov, ktorých súčet stupňov je aspoň n, pokiaľ taký pár vrcholov existuje.

Príklad 10.4. *TO DO*

Lema 10.5. *Hamiltonovský uzáver grafu je dobre definovaný.*

Veta 10.6 (Bondy, Chvátal, 1976)**.** *Graf je hamiltonovský práve vtedy, keď jeho hamiltonovský úzáver je hamiltonovský.*

Veta 10.7 (Chvátal, 1972)**.** *Nech G je graf so stupňami vrcholov $d_1 \leq \ldots \leq d_n$, kde $n \geq 3$. Ak pre všetky $i < n/2$ platí $d_i \leq i \Rightarrow d_{n-i} \geq n - i$ (Chvátalova podmienka), tak G je hamiltonovský.*

Dôkaz. Pridanie hrany nezníži žiadnu hodnotu v postupnosti stupňov vrcholov. Tiež, G je hamiltonovský práve vtedy, keď $C(G)$ je hamiltonovský. Môžeme teda predpokladať, že $G = C(G)$. Ukážeme, že Chvátalova podmienka implikuje $G = K_n$. Ukážeme obmenu: budeme predpokladať, že G je uzavretý graf s n vrcholmi, ktorý nie je kompletný a ukážeme, že existuje $i < n/2$ pre ktoré neplatí Chvátalova podmienka. To znamená, že aspoň i vrcholov je stupňa najviac i a aspoň $n-i$ vrcholov je stupňa menšieho ako $n-i$.

Keďže G nie je kompletný, existuje dvojica nesusedných vrcholov. Vyberieme dvojicu nesusedných vrcholov u, v takú, že súčet ich stupňov je maximálny. Platí $G = C(G)$ je uzavretý a teda to, že nie je hrana medzi vrcholmi u a v implikuje $d(u)+d(v) < n$. Vrcholy u a v označíme tak, aby platilo $d(u) \leq d(v)$. Pretože $d(u) + d(v) < n$, máme $d(u) < n/2$. Nech $i = d(u)$.

Potrebujeme nájsť i vrcholov stupňa najviac i. Pretože u, v sú pár nesusedných vrcholov s maximálnym súčtom stupňov, všetky vrcholy z $V(G) - v$, ktoré nie sú susedné s v majú stupeň najviac $d(u) = i$. Nesusedných vrcholov s vrcholom v je $n - 1 - d(v)$. Použitím $d(u) + d(v) \leq n - 1$ dostávame, že takých vrcholov je aspoň i.

Ďalej potrebujeme ukázať, že v G je aspoň $n-i$ vrcholov stupňa menšieho ako $n-i$. Každý vrchol z $V(G) - u$, ktorý nie je susedný s u má stupeň najviac $d(v)$ a platí $d(v) < n - d(u) = n - i$. Nesusedných vrcholov s u je $n - 1 - d(u)$. Keďže $d(u) \leq d(v)$, vrchol u má tiež stupeň najviac $d(v)$. Máme teda $n - i$ vrcholov stupňa menšieho ako $n - i$.

Ukázali sme, že pre špeciálne vybraté i platí $d_i \leq i$ a $d_{n-i} < n - i$, čo ukončuje dôkaz obmenou. □

♣ Nahliadnite, že Chvátalovu podmienku nespĺňajú grafy, ktoré majú vrchol stupňa 1.

♣ Nahliadnite, že Chvátalova podmienka implikuje súvislosť.

♣ Je pravda, že všetky grafy, ktoré spĺňajú Chvátalovu podmienku spĺňajú aj Diracovu podmienku?

- Číslo nezávislosti grafu G, označované symbolom $\alpha(G)$ symbolizuje maximálny počet po dnoch nesusedných vrcholov grafu G.

Veta 10.8. *Nech G je graf s aspoň tromi vrcholmi a $\alpha(G) \leq \kappa(G)$. Potom G je hamiltonovský.*

Dôkaz. Označme $k := \kappa(G)$. Tvrdenie triviálne platí pre $k \leq 1$. Nech $k \geq 2$, potom G obsahuje kružnicu. Nech C je najdlhšia kružnica v G, nech d je dĺžka C. Označme vrcholy na C cyklicky, t.j. $V(C) = v_0v_1 \ldots, v_{d-1}$. Ak C nie je hamiltonovská kružnica, vyberme si vrchol v mimo C a v-C-vejár $\mathcal{F} = \{P_i | i \in I\}$ v G, kde $I \subseteq \{0, 1, \ldots, d-1\}$ a každá P_i končí vo v_i. Nech $\mathcal{F}$ má maximálnu mohutnosť. Platí $vv_j \notin E(G)$ pre $j \notin I$, a podľa dôsledku Mengerovej vety máme

$$|\mathcal{F}| \geq \min\{k, |C|\}.$$

Pre všetky $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, ak $i \in I$, tak $i+1 \notin I$ (indexy sú brané modulo d), inak by $C - v_iv_{i+1} \cup P_i \cup P_{i+1}$ bol dlhšia kružnica ako C. Čiže $|\mathcal{F}| < |C|$ a preto $|I| = |\mathcal{F}| \geq k$.

Naviac $v_{i+1}v_{j+1} \notin E(G)$ pre všetky dvojice $i, j \in I$, inak by $C - v_i v_{i+1} - v_j v_{j+1} \cup P_i \cup P_j$ bola kružnica dlhšia ako C. Preto $\{v_{i+1} | i \in I\} \cup \{v\}$ je množina obsahujúca aspoň $k+1$ nezávislých vrcholov, čo je spor s $\alpha(G) \leq k$. □

♣ Podmienky vo Vetách 10.2, 10.7 a 10.8 sú postačujúce, nie sú však nutné. Nájdete príklady grafov, ktoré tieto podmieny nespĺňajú, a sú hamiltonovské.

Veta 10.9. *Nech G je graf so všetkými vrcholmi nepárneho stupňa. Potom každá hrana grafu G leží v párnom počte hamiltonovských kružníc.*

Dôkaz. Nech G je graf so všetkými vrcholmi nepárneho stupňa a nech $e = uv_0$ je hrana grafu G. Ukážeme, že e patrí do párneho počtu hamiltonovských kružníc. Nech $\mathcal{P}$ je množina hamiltonovských ciest (teda ciest obsahujúcich všetky vrcholy grafu), ktoré začínajú uev_0. Zostrojme pomocný graf H, ktorého množina vrcholov korešponduje s prvkami množiny $\mathcal{P}$. Nech $P \in \mathcal{P}$ a $P = uev_0e_0v_1 \dots e_{n-1}v_n$. Ak v_nv_k je hrana grafu G pre nejake $k < n-1$, môžeme z cesty P vytvoriť inú hamiltonovskú cestu Q tak, že z P odoberieme hrany $e_k = v_kv_{k+1}$ a pridáme hranu $e' = v_nv_k$. Potom

$$Q = uevе_0v_1 \dots v_k, e'v_ne_{n-1}v_{n-1} \dots v_{k+1}.$$

Podobne, cesta P sa dá vytvoriť z cesty Q obdobnou operáciou. V grafe H budú dva vrcholy spojené hranou práve vtedy, keď pre zodpovedajúce cesty v G platí, že jedna z druhej sa dá vytvoriť popísanou operáciou.

Zoberme si teraz ľuvobovoľnú cestu $P = uev_0e_0v_1 \dots e_{n-1}v_n \in \mathcal{P}$. Každá hrana incidentná vrcholom v_n, okrem hrany $v_{n-1}v_n$ a potenciálne v_nu dáva vzniknúť jednej hrane incidentnej s P v H. Ak G neobsahuje hranu v_nu, P je v H susedný s $deg_G(v_n) - 1$ vrcholmi, a teda je párneho stupňa. Ak na druhej strane G obsahuje hranu v_nu, to znamená, že P sa dá rozšíriť do hamiltonovskej kružnice, a stupeň P bude $deg_G(v_n) - 2$, teda nepárny. Keďže počet vrcholov nepárneho stupňa v grafe je párny, počet ciest z $\mathcal{P}$, ktoré sa dajú rozšíriť na hamiltonovské kružnice je párny. To znamená, že počet hamiltonovských kružníc prechádzajúcich hranou e (vo fixnutom smere) je párny. □

11 Toky v grafoch

- grafy su orientované, majú dva význačné vrcholy – *zdroj* (označovaný ako s) a *ústie* (označovaný ako t)
- pre každú orientovanú hranu e je zadaná hodnota $C(e) \in \mathbb{R}^+$ – *kapacita hrany*
- *tok v sieti* G je funkcia $\varphi : E(G) \to \mathbb{R}$, ktorá spĺňa nasledujúce vlastnosti:
  (1) $0 \leq \varphi(e) \leq c(e)$ pre každú orientovanú hranu e
  (2) pre každý vnútorný vrchol v, t.j. vrchol rôzny od zdroja a ústia platí *podmienka kontinuity*
  $$\sum_{e \in E^-(v)} \varphi(e) = \sum_{e \in E^+(v)} \varphi(e)$$
- *veľkosť toku* je definovaná ako $||\varphi|| = \sum_{e \in E^-(t)} \varphi(e) - \sum_{e \in E^+(t)} \varphi(e)$

- platí: $||\varphi|| = \sum_{e \in E^+(s)} \varphi(e) - \sum_{e \in E^-(s)} \varphi(e)$

- úloha o maximálnom toku: pre ľubovoľnú sieť nájsť tok maximálnej veľkosti

- PRIKLAD

- nech P je ľubovoľná cesta (nemusia byť všetky jej hrany rovnako orientované). Nech P^+ je množina súhlasne orientovaných hrán a P^- je množina nesúhlasne orientovaných hrán. *Rezerva* hrany e na ceste P je definovaná nasledovne:
  $res(e) = c(e) - \varphi(e)$, ak $e \in P^+$
  $\varphi(e)$, ak $e \in P^-$
  $res(P) = \min\{res(e), e \text{ leží na } P\}$
  rezervná cesta (zväčšujúca) je cesta P s $res(P) > 0$

- φ – pôvodný tok
  φ' – zväčšený (augmentovaný) tok
  $\varphi'(e) = \varphi(e) + res(P)$ ak $e \in P^+$
  $\varphi(e) - res(P)$ ak $e \in P^-$
  $\varphi'(e) = \varphi(e)$ ak $e \notin P$

Tvrdenie 11.1. *Ak P je rezervná s-t-cesta s $res(P) = r$, tak φ' je tok a plati $||\varphi'|| = ||\varphi|| + r$.*

- hranový s-t-rez je množina hrán, ktorá oddeľuje množinu vrcholov obsahujúcu s a neobsahujúcu t od jej komplementu a je minimálna vzhľadom na inklúziu

- *kapacita s-t-rezu S* je definovaná ako $c(S) = \sum_{e \in S^+} c(e)$, kde S^+ je množina hrán z S, ktoré sú orientované z komponentu obsahujúceho s do komponentu obsajujúceho t

Tvrdenie 11.2. *Nech S je s-t-rez v sieti. Potom veľkosť toku $||\varphi|| = \sum_{e \in S^+} \varphi(e) - \sum_{e \in S^-} \varphi(e)$.*

Dôkaz. Pri dôkaze môžeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet vrchov v komponente $G - S$, ktorý obsahuje s. □

Tvrdenie 11.3. *Nech φ je ľubovoľný s-t-tok a nech S je ľubovoľný s-t-rez v G. Potom $||\varphi|| \le c(S)$.*

Dôkaz. Vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia. □

Veta 11.4 (Veta o maximálnom toku (Ford, Fulkerson, 1957))**.** *Nech G je graf s vyznačeným zdrojom s a ústím t a s kapacitnými ohraničniami. Potom*
a) maximálny s-t-tok vždy existuje a platí, že maximálna veľkosť s-t-toku sa rovná minimálnej kapacite s-t-rezu.
b) Naviac ak kapacity sú celočíselne, existuje maximálny s-t-tok s celočíselnými hodnotami.

Dôkaz. a) Stačí dokázať, že existuje tok φ^* a taký rez S^*, že $||\varphi^*|| = c(S^*)$. Nech φ je ľubovoľný tok v G. Ak pre φ existuje zväčšujúca s-t-cesta, tak ho zväčšíme. Tento proces opakujeme, kým sa nedopracujeme k toku ψ pre ktorý už neexistuje zväčšujúca cesta. Dokážeme, že ψ je maximálny. Nahliadneme to tak, že nájdeme s-t-rez S, taký, že $||\psi|| = c(S)$.

Nech $A = \{s\} \cup \{v;\ \text{existuje rezervná } s\text{-}v \text{ cesta}\}$ a nech $B := V(G) - A$. Zjavne $B \neq \emptyset$, lebo $t \in B$. Nech U je s-t-rez prislúchajúci rozkladu $V(G) = A \cup B$. Ukážeme, že $||\psi|| = c(U)$.

- každá hrana U^+ je nasýtená, t.j. $\psi(e) = c(e)$
- každá hrana U^- je nulová

Platí $c(U) = \sum_{e\in U^+} c(e) = \sum_{e\in U^+} \psi(e) - \sum_{e\in U^-} \psi(e) = ||\psi||$. Stačí položiť $\varphi^* = \psi$ a $S^* = U$.

b) Postupným zväčšovaním nulového toku získame v každom kroku celočíselný tok, lebo zväčšujeme o rezervu, ktorá je celé číslo. □

11.1 Fordov-Fulkersonov algoritmus

každý vrchol $v \neq s$ môže dostať značku (u^+, r_v) alebo (u^-, r_v), ktorá hovorí, že sme nasli rezervnú cestu s rezervou r_v, pričom posledná hrana bola prejdená od vrcholu u súhlasne (ak (u^+, r_v)) alebo nesúhlasne (ak (u^-, r_v)). Vrcholu s priradíme značku $(\emptyset, \infty)$.

Prieskum vrchola Nech u je označkovaný, ale nepreskúmaný vrchol. Nech V^+ (V^-) je množina všetkých susedov vrchola u do (z) ktorých vedie cesta z (do) u. Vrchol u preskúmame ak

- každý neoznačkovaný vrchol $v \in V^+(u)$ dostane značku $(u^+, \min\{r_u, c(uv) - \varphi(uv)\})$ ak $\varphi(uv) < c(uv)$
- každý neoznačkovaný vrchol $v \in V^-(u)$ dostane značku $(u^-, \min\{r_u, \varphi(uv)\})$ ak $\varphi(uv) > 0$
- inak vrchol v nedostane žiadnu značku
- ak $v \in V^+(u) \cap V^-(u)$, značkujem iba po prvom príchode

1) začíname nulovým tokom

2) nech φ je doteraz skonštruovaný tok. Uskutočníme značkovanie spôsobom uvedeným vyššie.

3) ak vrchol t dostane značku, identifikujeme zväčšujúcu s-t-cestu a potom zväčšíme tok o hodnotu r_t. Idme na krok 2) Ak vrchol t nedostane značku, tak φ je maximálny tok.

PRIKLAD

Veta 11.5 (Mengerova veta, hranový variant, Kotzig)**.** *Nech G je graf a $u \neq v$ sú jeho dva vrcholy. Potom Najmenšia mohutnosť $\lambda(u, v)$ hranového u-v-rezu (t.j. minimálny počet hrán oddeľujúcich u a v) sa rovná maximálnemu počtu hranovo dizjunktných u-v-ciest.*

Dôkaz. Graf prerobíme na sieť $\overrightarrow{G}$: vrchol u bude zdroj s, vrchol v bude ústie t, každú hranu nahradíme dvojicou opačne orientovaných šípov s kapacitami 1. Podľa vety o maximálnom toku existuje taký maximálny tok, ktorý nadobúda celočíselné hodnoty. Nájdeme maximálny tok φ z u do v s celočísenými hodnotami na hranách, teda hodnoty na hranách sú 0 a 1. Zoberme si minimálny u-v-rez.

Kapacita minimálneho rezu = súčet hodnot na reze na pozitívnych hranách = $\lambda(u, v)$.

Podľa FF vety sa $||\varphi|| = \lambda(u, v)$.

Nech H je podgraf siete $\overrightarrow{G}$ tvorený všetkými šípmi e, pre ktoré platí $\varphi(e) = 1$. Nech w je ľubovoľný vrchol rôzny od u a v. Z podmienok kontinuity vyplýva, že počet šípov vstupujúcich do w sa rovná počtu sípov vystupujúcich z w. Z toho vyplýva, že existuje orientovaný ťah z u do v a z neho vyberieme orientovanú u-v-cestu. $H - E(P)$ v tomto grafe je celočíselný tok veľkosti $\lambda(u, v) - 1$. Postup opakujeme a nájdeme $\lambda(u, v)$ hranovo dizjunktných u-v-ciest. □

Dôsledok 11.6. *Existuje polynomiálny algoritmus na zistenie hranovej súvislosti.*

12 Cirkulácie

- daný je graf G (ani zdroj ani ústie nie sú špecifikované)
- *tok* na grafe G je usporiadná dvojica (D, f), kde D je orientácia hrán grafu a f je priradenie hodnôt hranám, v ktorom je podmienka kontinuity splnená pre každý vrchol sa nazýva aj *cirkulácia*
- hrany nadobúdajú ohodnotenie v niektorej abelovskej grupe (napr. $\mathbb{Z}$, alebo $\mathbb{Z}_n$)
- väčšinou sa požaduje $\varphi(e) \neq 0$ pre všetky hrany e, taký tok sa volá *nikde-nulový tok*
- *nikde-nulový k-tok* je tok s hodnotami v množine $\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(k-1)\}$
- Zjavne, ak má graf nikde nulový k-tok (alebo nikde-nulový tok v abelovskej grupe A) pre jednu orientáciu, tak má taký tok pre ľubovoľnú orientáciu.
- každý bezmostový graf má nikde nulový tok v $\mathbb{Z}$. Naozaj, nech G je bezmostový graf. Potom sa množina jeho hrán dá pokryť konečným počtom kružníc, povedzme $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Pošlime po každej kružnici C_i tokovú hodnotu 2^i. Súčtom dostávame nikde-nulový tok na G.
- tok na grafe sa nazýva *pozitívny* ak všetky jeho hodnoty sú kladné
- Nech (D, f) je tok na grafe G a nech v je vrchol grafu G. Hodnotu $f(v)$ definujeme ako $\sum_{e \in v^+} f(e) - \sum_{e \in v^-} f(e)$, kde v^+ (resp. v^-) označuje množinu hrán vychádzajúcich z (resp. vchádzajúcich do) vrchola v.

Tvrdenie 12.1. *Nech G je graf a (D, f) je tok na G. Nech S je hranový rez v grafe. Potom $\sum_{e \in S^+} f(e) - \sum_{e \in S^-} f(e) = 0$.*

Dôkaz. Nech rez S rozdelí množinu vrcholov na A a B. Potom $0 = \sum_{v \in A} f(v) = \sum_{e \in S^+} f(e) - \sum_{e \in S^-} f(e)$. Druhá rovnosť nastáva preto, že pre hrany, ktoré majú oba konce v A prispejú do sumy $\sum_{v \in A} f(v)$ rovnakou hodnotou, raz s kladným a raz so záporným znamienkom. □

Nech A je ľubovoľná abelovská. Funkcia $p_A(G)$ bude hovoriť, koľko rôznych tokov graf G má v grupe A, pričom dva toky, ktoré sa líšia len obrátením orientácie na niektorých a priradením opačnej tokovej hodnoty týmto hranám, budeme považovať za rovnaké. Inými slovami $p_A(G)$ označuje počet tokov v grupe A na grafe G pri pevne zvolenej orienácii hrán grafu G.

Tvrdenie 12.2. *Nech G je graf. Potom počet nikde-nulových tokov na G je pre všetky abelovské grupy rádu n rovnaký.*

Dôkaz. Symbolom G/e budeme označovať graf vytvorený z grafu G kontrakciou hrany e, t.j. odstranením hrany e a stotožnením jej koncových vrcholov, pričom vzniktné slučky a násobné hrany ponechávame.

Nech $e = uv \in E(G)$. Nahliadneme, že platí:

$$p(G) = p(G/e) - p(G - e).$$

Majme nikde-nulový tok na G/e. Priraďme hranám grafu G rovnaké tokové hodnoty ako majú v G/e, hrana e zostane zatiaľ neohodnotená. V grafe G, vo všetkých vrcholoch roznych od u a v platí podmienka kontinuity. Doplňme orientáciu a tokovú hodnotu (potenciálne nulovú) na e aby aj vo vrchole u platila podmienka kontinuity. Keďže vo vrchole grafu G/e, ktorý vznikol kontrakciou hrany e platí podmienka kontinuity, táto podmienka je splnená aj vo vrchole v grafu G, a teda vo všetkých vrcholoch grafu G. Z toho vyplýva, že počet nikde-nulových tokov na G/e je taký istý ako počet tokov na G, ktoré sú nenulové mimo e a na e môžu mať 0. Ale počet tokov na G, ktoré majú na e hodnotu 0 je rovný $p(G - e)$. Uvedená rovnosť je dokázaná.

Aplikujme opakovane dokázanú rovnosť na graf, pokiaľ nedostaneme graf s mostom alebo jednovrcholoý graf so slučkami. Podľa Tvrdenia 12.1, graf s mostom nemá nikde-nulový tok v žiadnej grupe. Jednovrcholový graf s k slučkami má n^k nikde-nulových tokov. Vidíme teda, že počet tokov grafu závisí len od počtu prvkov abelovskej grupy a nie od jej štruktúry. □

Veta 12.3. *Nech G je graf a n je prirodzené číslo. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*
(a) *G má nikde-nulový tok v grupe Z_n*
(b) *ak A je ľubovoľná abelovská grupa rádu n, tak G má nikde-nulový tok v A*
(c) *G má nikde nulový n-tok*

Dôkaz. Ekvivalencia tvrdení (a) a (b) vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia. Implikácia $(c) \Rightarrow (a)$ je zrejmá. Dokážeme $(a) \Rightarrow (c)$ a tým bude veta dokázaná. Nech (D, f) je nikde-nulový tok v grupe $\mathbb{Z}_n$. Potom (D, f) (bez modula) je orienácia a ohodnotenie hrán také, že pre každý vrchol platí $f(v) \equiv 0 \pmod{n}$ a každá hrana má kladnú hodnotu funcie f. Rozdeľme vrcholy grafu G do 3 množín podľa toho, či $f(v) > 0$ (množinu týchto vrcholov označíme V^+), $f(v) < 0$ (množinu týchto vrcholov označíme V^-) alebo $f(v) = 0$ (množinu týchto vrcholov označíme V^0). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\sum_{v \in V+} f(v)$ je minimálne možné. Ak $V^+ = \emptyset$, tak z Tvrdenia 12.1 vyplýva, že aj $V^- = \emptyset$ a (D, f) je nikde nulový n-tok na G. Predpokladajme teda, že $V^+ \neq \emptyset$ a nech $x \in V^+$. Nech M je množina vrcholov do ktorých vedie orientovaná cesta z x. Nahliadneme, že $M \cap V^- \neq \emptyset$. Sporom predpokladajme, že $M \cap V^- = \emptyset$. Potom ale na súčet hodnôt na hranovom reze medzi M a $V(G) - M$ je kladný a to je v spore s Tvrdením 12.1. Čiže existuje orientovaná x-y-cesta P pre niektorý vrchol $y \in V^-$. Pošlime po p hodnotu $-n$ a hodnotu $\sum_{v \in V+} f(v)$ sme zmenšili, spor s mininimalitou. □

- ak má G nikde nulový tok v $\mathbb{Z}_n$, tak hovoríme, že má *nikde nulový n-tok*

Tvrdenie 12.4. *Nech G je graf. Potom G má nikde nulový 2-tok práve vtedy, keď každý komponent G je eulerovský.*

Tvrdenie 12.5. *Nech G je kubický graf. Potom*

(a) *G má nikde nulový 3-tok práve vtedy, keď je bipartitný*

(b) *G má nikde nulový 4-tok práve vtedy, keď je hranovo 3-zafarbiteľný*

Dôkaz. (a) Nech f je nikde-nulový tok 3-tok na G. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že f je pozitívny. Potom vrcholy sú dvoch typov: (1) hrana s hodnotou 2 vchádza do vrcholu a dve hrany s hodnotou 1 vychádzajú z vrchola a (2) dve hrany s hodnotou 1 vchádzajú do vrchola a jedna hrana s hodnotou 2 vychádza z vrchola. Toto rozdelenie vrcholov zodpovedá bipartícii grafu. (b) Stačí ukázať, že kubický graf má 3-zafarbenie práve vtedy, keď má nikde nulový tok v grupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. A toto nahliadneme tak, že ako farby zoberieme nenulové prvky grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. □

Veta 12.6 (Nash-Williams 1961; Tutte 1961)**.** *Každý hranovo $2k$-súvislý graf má k hranovo dizjunktných kostier.*

Tvrdenie 12.7 (Jaeger, 1979)**.** *Každý hranovo 4-súvislý graf má nikde nulový 4-tok.*

Dôkaz. Ak T je kostra grafu G, tak pre ľubovoľnú hranu $e \in G - E(T)$ obsahje graf $T + e$ práve jednu kružnicu, označme ju $C(e)$. Nech $E(G) - E(T) = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Potom $S = C(e_1)\Delta C(e_2)\Delta \ldots \Delta C(e_k)$, kde Δ označuje symetrickú diferenciu množín, je graf s každým vrcholom párneho stupňa, a preto má nikde nulový $\mathbb{Z}_2$-tok. Navyše, S obsahuje všetky hrany $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Nech G je hranovo 4-súvislý graf. Podľa Vety 12.6, G má dve dizjunktné kostry, povedzme T_1, T_2. Podľa postupu opísaného vyššie, nájdime $\mathbb{Z}_2$-tok ϕ_1 na G, v ktorom hodnoty na všetkých hranách mimo T_1 sú nenulové (t.j. majú tokovú hodnotu 1). Obdobne, nájdime $\mathbb{Z}_2$-tok ϕ_2 na G, v ktorom hodnoty na všetkých hranách mimo T_2 sú nenulové. Keďže kostry T_1 a T_2 sú dizjunktné, (ϕ_1, ϕ_2) je nikde nulový $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$-tok na G. Podľa Vety 12.3, G má nikde nulový 4-tok. □

Hypotéza 12.8 (Tutte, 1949)**.** *Každý hranovo 4-súvislý graf má nikde nulový 3-tok.*

Veta 12.9 (Thomassen, 2012, [???])**.** *Každý hranovo 8-súvislý graf má nikde nulový 3-tok.*

Veta 12.10 (Lovász, Thomassen, Wu, Zhang [21], 2013)**.** *Každý hranovo 6-súvislý graf má nikde nulový 3-tok.*

Veta 12.11 (Jaeger, 1979)**.** *Každý graf bez mostov má nikde nulový 8-tok.*

Dôkaz. Najprv predpokladajme, že G je hranovo 3-súvislý graf. Zoberme graf $2G$, t.j. graf, ktorý vznikne z G zdvojením všetkých jeho hrán. Graf $2G$ je hranovo 6-súvislý. Podľa Vety 12.6, G má tri (po dvoch) dizjunktné kostry, T_1, T_2, T_3. Podľa postupu opísaného v dôkaze Tvrdenia 12.7, skonštruujeme pre kazdú z kostier T_i tok ϕ_i na G v grupe $\mathbb{Z}_2$, ktorý je nenulový na hranách mimo kostry. Keďže každá grafu G hrana môže patriť do najviac dvoch kostier, aspoň pre jednu kostru je mimokostrová a bude príslušnom na $\mathbb{Z}_2$-toku bude nadobúdať hodnotu 1. (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) je nikde nulový $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$-tok na G. Podľa Vety 12.3, G má nikde nulový 8-tok. Tým je tvrdenie pre hranovo 3-súvislé grafy dokázané.

Nech teraz G je najmení protipríklad. Zjavne G obsahuje hranový 2-rez, povedzme S. Graf $G - S$ má dva komponenty G_1 a G_2. Položme $G_i' = G_i + e_i$, kde e_i je hrana medzi dvomi vrcholmi G_i, ktoré boli incidentné s hranou rezu S. Keďže grafy G_i sú menšie ako G a sú bezmostové, majú nikde nulový $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$-tok. Je zrejmé, že toky možme vybrať tak, aby sa ich hodnoty zhodovali na hranách e_1 a e_2. Z týchto tokov zostrojíme nikde nulový tok na G, čo je v spore s tým, že G bol minimalny protipríklad. □

Veta 12.12 (Seymour, 1981). *Každý graf bez mostov má nikde nulový* 6-*tok.*

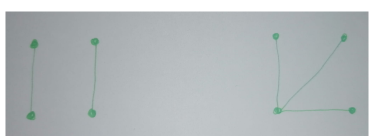
Hypotéza 12.13 (Tutte, 1954). *(*5-*toková hypotéza) Každý bezmostový graf má nikde nulový* 5-*tok.*

Tvrdenie 12.14. 5-*toková hypotéza je ekvivalentná svojej redukcii na kubické grafy.*

Dôkaz. Nech 5-toková hypotéza platí pre všetky bezmostové kubické grafy, dokážeme, že platí pre všetky grafy. Nech G je bezmostový graf. Vyrobíme z neho bezmostový kubický graf nasledujúcim spôsobom. Vrcholy stupňa 2 vyhladíme (t.j. odoberieme ich a medzi dvojicu vrcholov, s ktorými bol vrchol stupňa 2 susedný pridáme hranu). Vrcholy stupňa $k > 3$ nahradíme kružnicou na k vrcholoch na ktorú napojíme susedov pôvodného vrchola v ľubovoľnom poradí tak, aby vzniklo k vrcholov stupňa 3. (Vrcholy stupňa 1 v grafe G nie sú, keďže G je bezmostový.) Týmto sme dostali bezmostový kubický graf H. Nájdime nikde nulový 5-tok na H. V 5-toku je súčet hodnôt pretekajúcich cez ľubovoľný rez nulový, a preto keď hodnoty a orientácie zopovedajúci hran z H priradíme G, dostaneme nikde nulový tok na G. □

13 Extremálne grafy

- graf G na n vrcholoch s $G \not\supseteq H$ s najväčším počtom hrán sa volá *extremálny* pre n a H, jeho počet hrán sa označuje $\mathrm{ex}(n, H)$
- ak G je extremálny pre n a H, tak je aj hranovo maximálny s $H \not\subseteq G$
- opačne to však neplatí: G može byť hranovo maximálny s $H \not\subseteq G$, a mať menej hrán ako $\mathrm{ex}(n, H)$

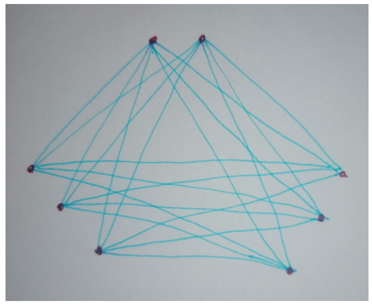


Obr. 10: Grafy s $n = 4$ so bez podgrafu P_3. Vľavo hranovo maximálny, vpravo extremálny.

- jedinečný kompletný $r - 1$ partitný graf na $n \geq r - 1$ vrcholoch, ktoreho partície sa v počte líšia o najviac jeden vrchol sa volajú *Turánové grafy*, označenie $T_{r-1}(n)$ a počet jeho hrán označujeme $t_{r-1}(n)$. Pre $n < r - 1$ formálne rozšírime túto definíciu, na rozdiel od štandardnej defininície pripustíme, že partície môžu byť prázdne, čiže $T_{r-1}(n) = K_n$ pre $n \leq r - 1$

Veta 13.1. *Pre všetky celé čísla* $r > 1$, $n \geq 1$, *každý graf* $G \not\supseteq K_r$ *s* n *vrcholmi a* $\mathrm{ex}(n, K_r)$ *hranami je* $T_{r-1}(n)$.

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na n. Pre $n \leq r-1$ zjavne platí $G = K_n = T_{r-1}(n)$. Predpokladajme teraz, že $n \geq r$.

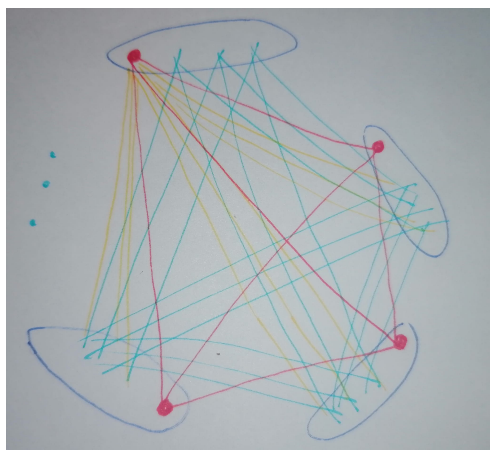


Obr. 11: $T_3(8)$

Keďže G je hranovo maximálny bez podgrafu K_r, má podgraf $K = K_{r-1}$. Z indukčného predpokladu vyplýva, že graf $G-K$ má najviac $t_{r-1}(n-r+1)$ hrán, a každý vrchol grafu $G-K$ má najviac $r-2$ susedov v K. Preto

$$|E(G)| \leq t_{r-1}(n-r+1) + (n-r+1)(r-2) + \binom{r-1}{2} = t_{r-1}(n),$$

pričom rovnosť nahliadneme preskúmaním Turánovho grafu $T_{r-1}(n)$.



Obr. 12: $T_{r-1}(n)$

Označme vrcholy grafu K ako $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$. Keďže G je extremálny pre K_r, namiesto nerovnosti máme rovnosť. Teda každý vrchol grafu $G-K$ má práve $r-2$ susedov v medzi $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$. Pre $i = 1, \ldots, r-1$ označme

$$V_i = \{v \in V(G) | vx_i \notin E(G)\}$$

množinu vrcholov grafu G, ktorých vrcholy v K sú práve vrcholy rôzne od x_i. Množiny V_i tvoria rozklad množiny $V(G)$. Keďže $K_r \nsubseteq G$, každá množina V_i je nezávislá, preto G je $(r-1)$-partitný. Keďže $T_{r-1}(n)$ je jediný $(r-1)$-partitný graf s n vrcholmi a maximálnym počtom hrán (nahliadni!), veta je dokázaná. $\square$

14 Niektoré vlastnosti skoro všetkých grafov

skúmame tie vlastnosti grafov, ktoré sú charatkeristické pre “väčšinu"grafov s veľkým počtom vrcholov

- $\mathcal{G}(n)$ množina všetkých označených grafov rádu n, $|\mathcal{G}(n)| = 2^{\binom{n}{2}}$
- Nech A je vlastnosť ktorú každý graf môže mať alebo nemať
  $\mathcal{G}A(n)$ množina všetkých označených grafov majúcich vlastnosť A
- *Skoro všetky grafy majú vlastnosť A (= skoro každý graf má vlastnosť A)*, ak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{G}A(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} = 1$$

- *Skoro žiaden graf nemá vlastnosť A*, ak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{G}A(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} = 0$$

Veta 14.1. *Skoro každý graf je súvislý.*

Dôkaz. Nech $\mathcal{S}(n)$ je množina všetkých súvislých grafov z $\mathcal{G}(n)$ a nech $\mathcal{G}_t(n)$ je množina všetkých tých, ktoré majú aspoň jeden komponent rádu t. Ak $G \in \mathcal{G}_t(n)$ pre $t < n$, tak je nesúvislý. Ale každý nesúvislý graf obsahuje aspoň jeden komponent rádu nanajvýš $\lfloor n/2 \rfloor$. Preto počet nesúvislých grafov je $\mathcal{G}(n) - \mathcal{S}(n)$. Platí

$$\mathcal{G}(n) - \mathcal{S}(n) \subseteq \bigcup_{t=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{G}_t(n)$$

$$|\mathcal{G}(n)| - |\mathcal{S}(n)| \leq |\mathcal{G}(n) - \mathcal{S}(n)| \leq |\bigcup_{t=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{G}_t(n)| \leq \sum_{t=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} |\mathcal{G}_t(n)|$$

$$|\mathcal{S}(n)| \geq |\mathcal{G}(n)| - \sum_{t=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} |\mathcal{G}_t(n)|$$

Odhadnime $|\mathcal{G}_t(n)|$. Kvôli tomu rozložme ľubovoľným spôsobom $V = V_1 \cup V_2$, kde $|V_1| = t$ a $|V_2| = n - t$ (takých rozkladov je $\binom{n}{t}$). Uvažujme množinu všetkých grafov rádu n, ktorá vznikne tak, že utvoríme ľubovoľný graf na V_1 a ľubovoľný graf na V_2, označme túto množinu $\mathcal{G}_{t,n-t}^{V_1}(n)$. Platí

$$|G_{t,n-t}^{V_1}| = 2^{\binom{t}{2}+\binom{n-t}{2}} = 2^{\binom{n}{2}-t(n-t)}.$$

Keďže $\mathcal{G}_t(n) \subseteq \bigcup_{V_1 \subset V, |V_1|=t|} \mathcal{G}_{t,n-t}(n)$, dostávame

$$|\mathcal{G}_t(n)| \leq \binom{n}{t} 2^{\binom{n}{2}-t(n-t)}.$$

Odtiaľ

$$\frac{|\mathcal{S}(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} \geq \frac{|\mathcal{G}(n)| - \sum_{t=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} |\mathcal{G}_t(n)}{|\mathcal{G}(n)|} = 1 - \sum_{t=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{t} 2^{-t(n-t)}.$$

Označme $f(t) = \binom{n}{t} 2^{-t(n-t).}$
Ak skúmame $f(t+1)/f(t)$, zistíme, že funkcia klesá, preto

$$\sum_{t=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} f(t) < \frac{n}{2} f(1) = \frac{n^2}{2^{n-2}} \to 0.$$

□

15 Ramseyovské čísla

Ramseyovské číslo $R(p, q)$ označuje najmenšie n také, že pri ľubovoľnom zafarbení hrán komplého grafu K_n červenou alebo modrou farbou, graf obsahuje K_p s každou hranou červenej farby alebo K_q s každou hranou modrej farby.

- paralela s Dirichletovým princípom

Tvrdenie 15.1. *$R(3, 3) = 6$.*

Dôkaz. Najprv dokážeme, že $R(3, 3) \leq 6$. Zoberme si $G = K_6$ a nech každá hrana grafu G je zafarbená červenou alebo modrou farbou. Nech v je ľubovoľný vrchol grafu G. S vrcholom v je incidentných päť hrán a z dirichletovho princípu vyplýva, že aspoň 3 z nich majú rovnakú farbu, nech sú to hrany va, vb a vc. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že tieto tri hrany sú červenej farby. Ak niektorá z hrán ab, ac a bc je červená, tak spolu s hranami vedúcimi z jej koncových vrcholov do v tvorí červený K_3. Inak všetky tri hrany ab, ac a bc sú modré a indukujú modrý K_3.

Kedže K_5 sa dá hranovo rozložiť na dve kružnice dĺžky 5, platí $R(3, 3) > 5$ a tvrdenie je dokázané. □

Tvrdenie 15.2. *$R(p, q) \leq R(p - 1, q) + R(p, q - 1)$. Ak navyše oba sčítance na pravej strane sú párne, tak nerovnosť je ostrá.*

Dôkaz. Nech G je kompletný graf na $R(p - 1, q) + R(p, q - 1)$ vrcholoch, ktorého každá hrana je zafarbená červenou alebo modrou farbou. Stupeň každého vrchola grafu G je $R(p-1, q)+R(p, q-1)-1$. Preto v ľubovoľnom vrchole je buď aspoň $R(p-1, q)$ červených hrán alebo $R(p, q-1)$ modrých hrán. V oboch prípadoch dostávame, že G obsahuje alebo modrý K_p alebo červený K_q. Tým je prvá čast tvrdenia dokázaná.

Pre dôkaz druhej časti predpokladajme sporom, že obe čísla $R(p-1, q)$ a $R(p, q-1)$ sú párne a existuje hranové 2-zafarbenie kompletného grafu H na $R(p-1, q)+R(p, q-1)-1$ vrcholoch také, že každý vrchol je incidentný s najviac $R(p-1, q)-1$ červenými a najviac $R(p, q - 1) - 1$ modrými hranami. Kedže stupne v H sú $R(p - 1, q) + R(p, q - 1) - 2$, každý vrchol musí mať presne $R(p-1, q)-1$ červenými a presne $R(p, q-1)-1$ modrými hranami. Ale potom červený graf indukuje regulárny graf nepárneho stupňa na nepárnom počte vrcholov a taký graf neexistuje, spor. □

Tvrdenie 15.3. *Nech T je strom s k hranami a G je graf s $\delta(G) \geq k$. Potom T je podgrafom grafu G.*

Dôkaz. TO DO □

Veta 15.4 (Chvátal [14], 1977)**.** *Nech T je strom na t vrcholoch. Potom $R(T, K_n) = (t - 1)(n - 1) + 1$.*

Dôkaz. Keď v grafe $K_{(m-1)(n-1)}$ zafarbíme červenou farbou hrany v $n - 1$ dizjunktných kópiách grafu K_{t-1} a modrou zvyšné hrany dostaneme zafarbenie grafu, ktorý neobsahuje ako podraf ani strom T so všetkými hranami červenej farby ani K_n so všetkými hranami modrej farby. Preto $R(T, K_n) \geq (t - 1)(n - 1) + 1$.

Opačnú nerovnosť dokážeme indukciou na n. Pre $n = 1$ tvrdenie triviálne platí. Predpokladajme, že platí $R(T, K_{n-1}) = (t - 1)(n - 2) + 1$ a dokážeme, že $R(T, K_n) =$

$p \setminus q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			6	9	14	18	23	28	36	40 – 42
4				18	25	36 – 40	49 – 58	59 – 79	73 – 106	92 – 136
5					43 – 48	58 – 85	80 – 133	101 – 194	133 – 282	149 – 381
6						102 – 161	115 – 273	134 – 427	183 – 656	204 – 949
7							205 – 497	219 – 840	252 – 1379	292 – 2134
8								282 – 1532	329 – 2683	343 – 4432
9									565 – 6588	581 – 12677
10										798 — 23556

Tabuľka 1: Hodnoty a známe intervaly pre $R(p, q)$

$(t-1)(n-1)+1$. Ak graf obsahuje vrchol x incidentný s viac ako $(t-1)(n-2)$ modrými hranami, tak podľa indukčného predpokladu graf obsahuje T so všetkými červenými hranami alebo modrý K_{n-1}, ktorý spolu s x spolu modrý K_n. Inak každý vrchol je incidentný s aspoň $t-1$ červenými hranami. Čize podľa Tvrdenia 15.3 graf obsahuje červený T. $\square$

16 Rozklady grafov

Veta 16.1 (Kotzig [15], 1957)**.** *Každý súvislý graf s párnym počtom hrán sa dá rozložiť na cesty dĺžky* 2*.*

Dôkaz. Nech G je graf s párnym počtom hrán. Priraďme každej hrane ľubovoľnú orientáciu a získajme tak orientáciu celého G. Teraz túto orientáciu zmodifikujeme tak, aby z každého vrchola vychádzal párny počet hrán. Keďže G má párny počet hrán, je párny počet vrcholov, čo nespĺňajú túto podmienku. Ak z kadého vrchola vychádza párny počet hrán, máme želanú orientáciu. Inak nech x a y sú ľubovoľné dva vrcholy, z ktorých vychádza nepárny počet hrán. Nech P je ľubovoľná x-y-cesta (taká existuje, lebo G je súvislý). Zmeňme orientáciu všetkých hrán na P. Parita počtu vychádzajúcich hrán sa na vnútorných vrcholoch cesty nezmení a na koncových zmení. Čiže nová orientácia bude mať o dva vrcholy s nepárnym počtom vychádzajúcich hrán menej. Opakovaním tohto postupu dostaneme želanú orientáciu.

Vo finálnej orientácii z každého vrchola vychádza párny počet hrán. čiže graf sa dá rozložiť na párne hviezdy ($K_{1,2k}$). Každá z hviezd sa dá rozložiť na cesty dĺžky 2. Zjednotením množín týchto ciest dostávame hľadaný rozklad. $\square$

Veta 16.2 (Lovász [19], 1966)**.** *Nech* $G = (V, E)$ *je graf a nech* $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$ *sú nezáporné celé čísla také, že*

$$k_1 + k_2 + \dots + k_\alpha = k - \alpha + 1.$$

Potom existuje rozklad $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots V_\alpha$ *taký, že* $\Delta(G[V_i]) \leq k_i$ *pre všetky* $i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$*.*

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na α. Pre $\alpha = 1$ je tvrdenie zrejmé.

Nech $\alpha = 2$. Predpokladáme, že platí $k_1 + k_2 = k - 1$, a teda $k \geq 1$. Ak $k = 1$, potom $k_1 = k_2 = 0$ a G sa skladá z izolovaných hrán a vrcholov, a teda tvrdenie platí. Predpokladajme teraz, že $k \geq 2$. Rozložme V na dve podmnožiny V_1 a V_2 tak, aby výraz

$$k_1(2|E_2| - |V_2|) + k_2(2|E_1| - |V_1|) \qquad (*)$$

kde $E_i = E(G[V_i])$ pre $i \in \{1, 2\}$, nadobúdal minimálnu hodnotu. Dokážeme, že $\Delta(G[V_i]) \leq k_i$ pre $i \in \{1, 2\}$.

Nech $x \in V_1$ a nech x je susedný s a (resp. b) vrcholmi z V_1 (resp. V_2). Keďže x je stupňa najviac k, platí $a + b \leq k$. Ak presunieme x do V_2, t.j. pri rozklade $V = (V_1 - \{x\}) \cup (V_2 \cup \{x\})$ sa hodnota výrazu (*) zmení o $k_1(2b - 1) + k_2(-2a + 1)$. Z minimality výrazu (*) pre rozklad $V_1 \cup V_2$ máme

$$k_1(2b - 1) + k_2(-2a + 1) \geq 0.$$

Použitím vzťahov $a + b \leq k$ a $k_1 + k_2 = k - 1$ a vydelenim nerovnice $2(k - 1)$ dostávame

$$a \leq k_1 + \frac{1}{2},$$

a preto $a \leq k_1$. Keďže x bol ľubovoľný vrchol z V_1, platí $\Delta(G[V_1]) \leq k_1$. Obdobným spôsobom môžme ohraničiť $\Delta(G[V_2])$.

Predpokladajme teraz, že $\alpha > 2$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_\alpha = k - \alpha + 1$ a veta platí pre $\alpha - 1$. Položme $k'_1 = k_1$ a $k'_2 = k_2 + k_3 + \cdots + k_\alpha + \alpha - 2$. Potom $k'_1 + k'_2 = k - \alpha + 1 + \alpha - 2 = k - 1$. Keďže veta pre $\alpha = 2$ platí, V sa dá rozložiť na V_1 a V_2 také, že $\Delta(G[V_i]) \leq k'_i$ pre $i \in \{1, 2\}$. Keďže $k_2 + k_3 + \cdots + k_\alpha = k'_2 - (\alpha - 1) + 1$, podľa indukčného predpokladu V_2 sa dá rozložiť na $V_{22} \cup V_{23} \cup \ldots \cup V_{2\alpha}$ také, že $\Delta(G[V_{2i}]) \leq k_i$ pre $i \in \{2, 3, \ldots, \alpha\}$. Množiny $V_1, V_{22}, V_{23}, \ldots, V_{2\alpha}$ tvoria hľadaný rozklad. □

♣ Veta 16.1 ukazuje, že ak je nutná podmienka deliteľnosti splnená, tak graf sa dá rozložit na strom s dvomi hranami. Toto však nie je pravda vo všeobecnosti. Nájdite príklad súvislého grafu G s m hranami a stromu T s t hranami, pričom $t|m$ a G sa nedá hranovo rozložiť na kópie stromu T.

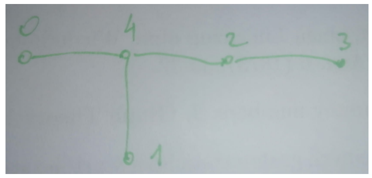
- Na druhej strane Häggkvist vyslovil hypotézu, že ak G je $2m$-regulárny graf a T je ľubovoľný strom na m hranách, tak G sa dá hranovo rozložit na $|V(G)|$ kópií stromu T. Aj špeciálny prípad tejto hypotézy keď G je kopletný graf je stále otvorený.

Hypotéza 16.3 (Ringel [26], 1964)**.** *Nech T je strom na m hranách. Potom K_{2m+1} sa dá hranovo rozložiť na $2m + 1$ kópií stromu T.*

- Nástrojom na dokázanie predchádzajúcej hypotézy môže byť graceful labeling. *Graceful labeling* grafu G s m hranami je funkcia $f : V(G) \to \{0, 1, \ldots, m\}$ taká, že rôzne vrcholy dostanú rôzne hodnoty a $\{|f(u) - f(v)| : uv \in E(G)\} = \{1, \ldots, m\}$.

Hypotéza 16.4 (Kotzig, Ringel [26], 1964)**.** *Každý strom má graceful labeling.*

Veta 16.5 (Rosa [25], 1967)**.** *Ak strom T s m hranami má graceful labeling, tak K_{2m+1} sa dá rozložiť na $2m + 1$ kópií stromu T.*



Obr. 13: Graceful labeling stromu

Dôkaz. Predpokladajme, ze T je strom s m hranami a že má graceful labeling. Označme vrcholy grafu K_{2m+1} číslami $0, 1, \ldots, 2m$. Jednu kópiu stromu T v grafe K_{2m+1} určíme tak, že čísla labelov na vrcholoch budú zodpovedať číslam vrcholov K_{2m+1}. Ďalšie kópie stromu T zostrojíme tak, že pre fixné $j \in \{1, 2, \ldots, 2m\}$, namiesto labelu x použijeme $x + j \pmod{2m+1}$. Keďže v každej kópii je práve jedna hrana pre každý prípustný rozdiel, vytvorené kópie budú tvoriť rozklad grafu K_{2m+1}. □

♣ Nájdite graceful labeling pre hviezdy a cesty.

Literatúra

[1] C. Berge, Two theorems in graph theory, Proceedings of the National Academy of Sciences 43 (1957) 842–844.

[2] Brooks, R. L. (1941), On colouring the nodes of a network, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 37 (2): 194–197.

[3] D. W. Cranston, L. Rabern, Brooks' theorem and beyond, J. Graph Theory 80 (2015) 199–225.

[4] R. Diestel, ...

[5] E. Egerváry, On combinatorial properties of matrices (maďarsky), Math. Lapok 38 (1931) 16-28.

[6] M.N. Ellingham, L. Goddyn, List edge colourings of some 1-factorable multigraphs, Combinatorica 16 (1996), 343-352.

[7] E. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae 8 (1736), 128-140 (appeared 1741)

[8] F. Galvin, The list chromatic index of a bipartite multigraph, J. Comb. Th. (B) 63 (1995), 153-158.

[9] H. Grötzsch, Zur Theorie der diskreten Gebilde, VII: Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel, Wiss. Z. Martin-Luther-U., Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe, 8(1959) 109–120.

[10] R. P. Gupta, The chromatic indes and the degree of a graphs, Not. Amer. Math. Soc. 13 (1966), 719.

[11] Hall, Philip, On Representatives of Subsets, J. London Math. Soc. , 10 (1935) 26–30.

[12] P.J. Heawood., Map-colour theorem, Q.J.Math. 24(1890), 332-339.

[13] C. Hierholzer, Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Uberbrechnung zu umfahren, Math. Ann. 6 (1873), 30-32.

[14] V. Chvátal, Tree-complete graph Ramsey numbers. J. Graph Theory 1, 93 (1977)

[15] A. Kotzig, Z teorie konečných pravidelných grafov tretieho a štvrtého stupňa, Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), 76–92.

[16] D. Kőnig (1916), Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, Math. Ann. 77 (1916), 453-465.

[17] D. Kőnig (1931), Gráfok és mátrixok, Math. Lapok, 38: 116–119.

[18] K. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, Fund. Math. (in French), 15 (1930) 271–283

[19] L. Lovász, On decomposition of graphs, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 1 (1966) 237-238.

[20] L. Lovász, Three short proofs in graph theory, J. Comb. Th. (B) 19 (1975), 269-271.

[21] L. Lovász, C. Thomassen, Y. Wu, C.-Q. Zhang, Nowhere-zero 3-flows and modulo k-orientations, J. Comb. Th. (B) 103 (2013), 587-598.

[22] K. Menger, Zur Allgemeinen Kurventheorie, Fundamenta Mathematicae, Vol. 10, (1927), pp. 96-115.

[23] J. Mycielski, Sur le coloriage des graphes, Colloq. Math. 3, (1955), 161-162.

[24] J. Petersen, Die Theorie der regulären graphs, Acta Mathematica, 15(1891) 193–220.

[25] A. Rosa, On certain valuation of the vertices of a graph, In *Theory of Graphs (Intl. Symp. Rome 1966).* Gordon and Breach, Bunod (1967), 349-355.

[26] G. Ringel, Problem 25. In *Theory of Graphs and Its Applications (Proc. Symp. Smolenice 1963).* Czech. Acad. Sci. (1964), 162.

[27] C. E. Shannon, A theorem on coloring the lines of a network, J. Math. Phys. 28 (1949), 148-151.

[28] C. Thomassen, Every planar graph is 5-choosable, J. Comb. Th. (B) 62 (1994), 180-181.

[29] W. T. Tutte, The factorisation of linear graphs, J. Lond. Math. Soc. 22 (1947), 107-111.

[30] W. T. Tutte, A theory of 3-connected graphs, Nederl. Wetensch. Proc. Ser. A 64 (1961), 441–455.

[31] V.G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p-graph, Diskret. Analiz. 3 (1964), 25-30.

[32] M. Voigt: List colourings of planar graphs, Discrete Math. 120(1-3) (1993) 215-219.

[33] D. B. West ...