Prednášky z Úvodu do kombinatoriky a teórie grafov
časť Teória grafov

Edita Máčajová

11. mája 2021

Ak si v texte všimnete chyby, nezrovnalosti, či preklepy budem vďačná, keď mi to oznámite mailom na `macajova@dcs.fmph.uniba.sk`. Taktiež ma zaujímajú miesta, ktorým ste mali problém porozumieť.

V texte nájdete úlohy označené znakom ♣. Odporúčam si ich urobiť vo chvíli, keď sa v tomto texte k nim dočítate. Často ide o nie príliš komplikované zadanie, ktoré má pomôcť pri osvojení si nového pojmu, či súvislostí.

1 Základné pojmy a označenia

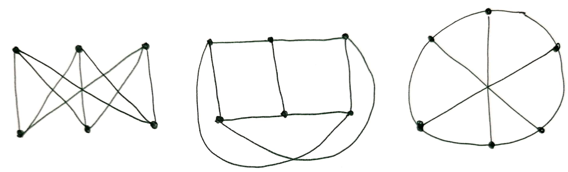
Graf $G = (V, E)$ je daný konečnou neprázdnou množinou vrcholov V a množinou hrán E, kde E je množina 2-prvkových podmnožín množiny V. Grafy obyčajne zobrazujeme v rovine tak, že vrcholom priradíme rôzne body roviny a každej hrane zodpovedá súvislá čiara spájajúca body zodpovedajúce dvom vrcholom hrany.

Definície:

- vrchol v je *incidentný* s hranou e ak $v \in e$
- dva vrcholy, ktoré sú incidentné s hranou e voláme *koncové* vrcholy hrany e
- dva koncové vrcholy tej istej hrany voláme *susedné*
- hranu s koncovými vrcholmi u a v označujeme uv (čiže množinové zátvorky vynechávame)
- dve hrany, ktoré zdieľajú vrchol voláme *susedné*
- ak všetky dvojice vrcholov sú navzájom susedné, graf nazývame *kompletný*; kompletný graf na n vrcholoch označujeme K_n
- *kružnica* na n vrcholoch, označovaná C_n, je graf (V, E), kde $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a $E = \{v_nv_1, v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$
- graf nazveme *triviálny*, ak obsahuje jeden vrchol (a žiadne hrany)
- graf nazveme *regulárny* ak majú všetky jeho vrcholy rovnaký stupeň. Ak tento spoločný stupeň je k, graf nazveme k-*regulárny*.

- dva grafy $G(V,E)$ a $G'(V',E')$ sú *izomorfné*, označenie $G \simeq G'$ ak existuje bijekcia $\varphi : V \to V'$ taká že $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ pre všetky dvojice vrcholov x a y.
  - zobrazenie φ sa volá *izomorfizmus*
  - ak $G = G'$, φ sa volá *automorfizmus*

♣ Nahliadnite, že tri grafy na Obr. 1 sú izomorfné.



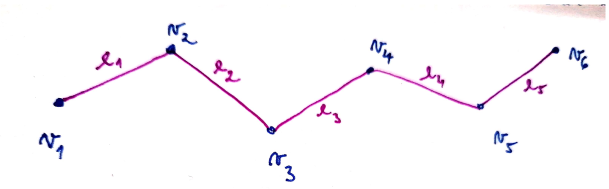
Obr. 1

- graf $G(V,E)$ je *podgrafom* grafu $G'(V',E')$ ak $V \subseteq V'$ a $E \subseteq E'$; označenie $G \subseteq G'$
- *faktor* grafu G je podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy
- Nech G je graf a nech $U \subseteq V(G)$. Podgraf grafu G s množinou vrcholov U a hranovou množinou, ktorá obsahuje všetky hrany z G s oboma koncovými vrcholmi v U nazveme *indukovaný* podgraf.
- $N(v)$ je množina susedov vrchola v
- *stupeň vrchola* v – počet hrán incidentných s v; označenie $d_G(v)$, alebo $d(v)$
- *minimálny stupeň* $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$
- *maximálny stupeň* $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$

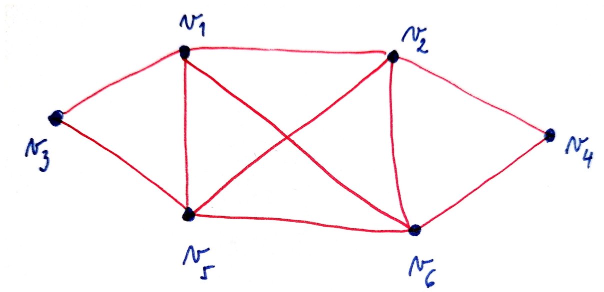
Tvrdenie 1.1. *Každý graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.*

Dôkaz. Súčet stupňov vrcholov $\sum_{v \in V(G)} d(v)$ je párne číslo, lebo každá hrana je zarátaná dvakrát. Z toho vyplýva, že v súčte je párny počet nepárnych sčítancov. □

- *sled* – postupnosť $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \ldots v_n$, kde v_i je vrchol pre $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, e_i je hrana pre $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ a
- *ťah* je sled, kde sa neopakujú hrany; *uzavretý ťah* je ťah, ktorého prvý a posledný vrchol sa rovnajú
- *cesta* je sled, kde sa neopakujú vrcholy (a teda ani hrany); *u-v-cesta* je cesta s koncovými vrcholmi u a v
  - *dĺžka* cesty (sledu/ťahu) je počet hrán (sledu/ťahu)
  - P_k cesta dĺžky k
- keďže uvažujeme jednoduché grafy (t.j. grafy bez slučiek a násobných hrán), sled, ťah a cesta sú jednoznačne zadané postupnosťou vrcholov, a teda názvy hrán nemusíme písať, pozri Obr. 3



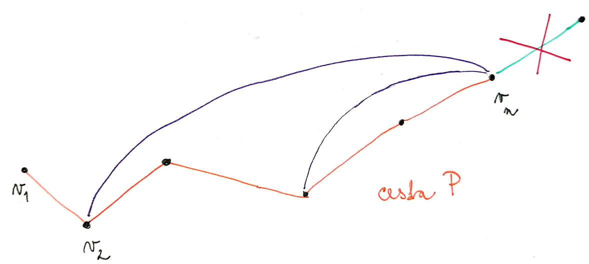
Obr. 2: Cesta dĺžky 5



Obr. 3: Na obrázku je graf G. Postupnosť $v_1v_2v_4v_6v_5$ je cesta, $v_1v_2v_6v_4v_2v_5$ je ťah a $v_1v_2v_4v_6v_2v_1v_3$ je sled v grafe G.

Tvrdenie 1.2. *Každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$.*

Dôkaz. Nech $P = v_1v_2 \dots v_n$ je najdlhšia cesta v grafe G. Ak by nejaký sused vrchola v_n ležal mimo P, tak by to bolo v spore s tým, že P je najdlhšia cesta v G. Preto všetci susedia v_n, ktorých je aspoň $\delta(G)$ ležia na P, pozri Obr. 4. Vrchol v_n takisto leží na P, a teda P má aspoň $\delta(G) + 1$ vrcholov. Z toho vyplýva,že dĺžka P je aspoň $\delta(G)$. $\square$



Obr. 4: Všetci susedia vrchola v_1 ležia na ceste P

- graf je *súvislý* ak medzi každou dvojicou vrcholov existuje cesta, inak je *nesúvislý*
- *komponent* grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G vzhľadom na inklúziu
- graf nazveme *acyklický*, ak neobsahuje kružnicu
- *strom* je súvislý acyklický graf
- *les* je acyklický graf
- *list* je vrchol stupňa 1 v strome

Veta 1.3. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné pre graf* T
(a) T *je strom*
(b) *každá dvojica vrcholov v* T *je spojená práve jednou cestou v* T
(c) T *je minimálny súvislý, t.j.* T *je súvislý, ale pre každú hranu* $e \in T$, *graf* $T - e$ *je nesúvislý (odoberáme len hranu* e *bez jej koncových vrcholov)*
(d) T *je maximálny acyklický, t.j.* T *neobsahuje kružnicu, ale* $T + xy$ *obsahuje kružnicu pre každú dvojicu nesusedných vrcholov* x *a* y *z* T

Dôkaz. Dokážeme iba ekvivalenciu (a)$\Leftrightarrow$(c), ostatné sa dokazujú podobne.

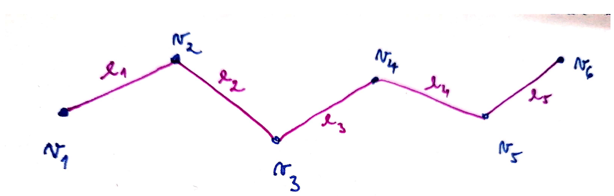
(a)$\Rightarrow$(c) Nech T je strom. Podľa definície je T súvislý graf. Sporom predpokladajme, že T nie je minimálny súvislý, t.j. že obsahuje hranu e takú, že $T - e$ je súvislý. Nech u a v sú koncové vrcholy hrany e. V $T - e$ existuje u-v-cesta, nazvime ju P. Potom $P \cup \{e\}$ je kružnica v T, čo je nemožné, keďže T je strom.

(c)$\Rightarrow$(a) Nech T je minimálny súvislý graf. Jedna z podmienok definície stromu je teda zjavne splnená (súvislosť). Dokážme, že T je acyklický. Ak by obsahoval kružnicu, tak pre ľubovoľnú hranu e z tejto kružnice by platilo, že $G - e$ je súvislý, čo by bolo v spore s tým, že G je minimálny súvislý. □

- *kostra* grafu G je podgraf grafu G, ktorý je strom a obsahuje všetky vrcholy grafu G

Tvrdenie 1.4. *Každý súvislý graf obsahuje kostru.*

Dôkaz. Opakovane vyhadzujeme hranu, ktorá leží v kružnici. □



Obr. 5

2 Bipartitné grafy

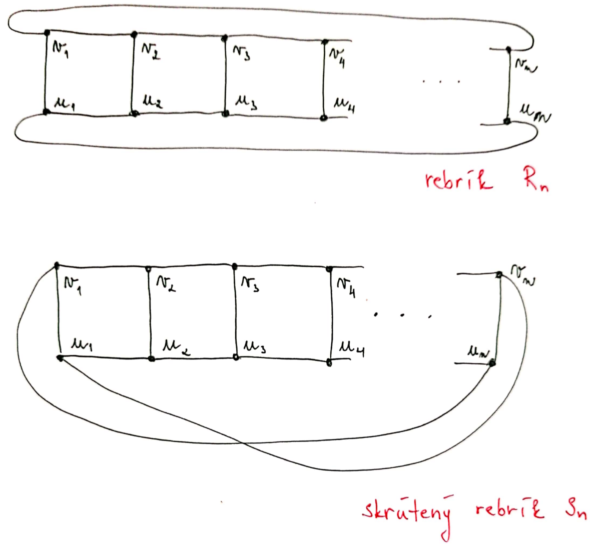
- graf G je *bipartitný* ak $V(G)$ sa dá rozložiť do dvoch množín A a B tak, že každá hrana má jeden koncový vrchol v A a druhý v B.

♣ Pre ktoré čísla n je sú grafy nazývané *rebrík* a *skrútený rebrík* bipartitné?

Ľahko sa dá nahliadnuť, že v bipartitnom grafe má každá kružnica párnu dĺžku. Dokážeme, že platí aj opačná implikácia. Najprv však dokážeme lemu.

Lema 2.1. *Každý uzavretý sled nepárnej dĺžky obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku sledu. Ako bázu zoberieme uzavretý sled na troch hranách (uzavretý sled na jednej hrane v jednoduchých grafoch neexistuje). A keďže uzavretý sled na troch hranách je kružnica na troch hranách, tu tvrdenie platí.



Obr. 6: Rebrík R_n a Skrútený rebrík S_n

Majte uzavretý sled S nepárnej dĺžky d a predpokladajme, že pre všetky uzavreté sledy nepárnej dĺžky menšej ako d toto tvrdenie platí. Nech $S = v_1v_2 \dots v_n$, pričom $v_n = v_1$.

Prípad 1. $v_i \neq v_j$ pre všetky $i \neq j$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, a teda vrcholy sa v slede neopakujú okrem $v_n = v_1$. V tomto prípade je S kružnicou nepárnej dĺžky.

Prípad 2. $v_i = v_j$ pre nejaké $i \neq j$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $i < j$. Uvažujme dva sledy
$S' = v_1v_2 \dots v_i = v_jv_{j+1} \dots v_n = v_1$ a
$S'' = v_iv_{i+1} \dots v_j = v_i$.

Ľahko vidno, že oba S' aj S'' sú uzavreté sledy. Navyše dĺžka sledu S je súčtom dĺžok sledov S' a S'', a keďže S je nepárnej dĺžky, dĺžka práve jedného z S' a S'' je nepárna, nech je to S'. Použitím indukčného predpokladu nahliadneme, že S' a teda aj S obsahuje uzavretý sled nepárnej dĺžky. □

Poznamenajme, že ak by sme zmenili oba výskyty slova nepárny v znení lemy na slovo párny, tvrdenie by nebolo pravdivé.

♣ Nájdete príklad sledu, ktorý je protipríkladom k pozmenenému tvrdeniu.

- *vzdialenosť vrcholov u a v* v grafe G, označenie $dist(u, v)$, je dĺžka najkratšej u-v-cesty

Veta 2.2. *Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

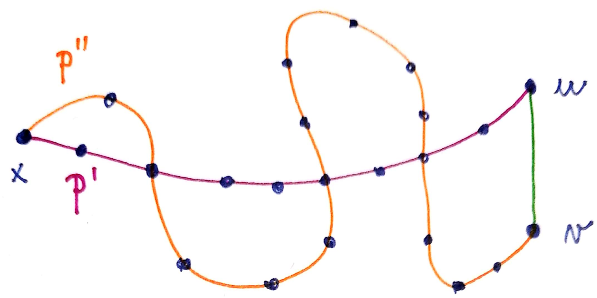
Dôkaz. Dokážeme dve implikácie.

($\Rightarrow$) Táto implikácia je zrejmá, keďže na každej kružnici sa musia striedať vrcholy z dvoch množín.

($\Leftarrow$) Majme graf G ktorý má každú kružnicu párnej dĺžky. Dokážeme, že G je bipartitný. Môžme predpokladať, že G je súvislý, lebo inak môžme urobiť nasledujúcu úvahu pre každý komponent a využiť fakt, že zjednotenie bipartitných grafov je bipartitný graf. Nech x je ľubovoľný pevne zvolený vrchol grafu G. Rozdeľme množinu $V(G)$ do dvoch

množín:
$A = \{v \in V(G); dist(v, x)$ je párne číslo$\}$ a
$B = \{v \in V(G); dist(v, x)$ je nepárne číslo$\}$.

Zjavne každý vrchol z $V(G)$ patrí do práve jednej z množín A a B. Ukážeme, že každá hrana z $E(G)$ má jeden koniec v A a druhý v B. Sporom predpokladajme, že existuje hrana $e \in E(G)$, ktorej oba koncové vrcholy patria A. (Dôkaz, že oba koncové vrcholy nemôžu patriť B je obdobný.) Nech $e = uv$, nech P' je cesta, na ktorej sa nadobúda najkratšia vzdialenosť medzi u a x a nech P'' je cesta, na ktorej sa nadobúda najkratšia vzdialenosť medzi v a x. Potom $S = P' \cup P'' \cup uv$ je uzavretý sled, pozri Obr. 7. Keďže u aj v patria A, obe cesty P' a P'' majú párnu dĺžku. Sled S je teda nepárnej dĺžky a podľa Lemy 2.1 obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, čo je v spore s predpokladom. Dôkaz spätnej implikácie je ukončený. □



Obr. 7

3 Eulerovské grafy

- *eulerovský ťah* v grafe G je uzavretý ťah v G, ktorý obsahuje každú hranu. Graf je *eulerovský* ak obsahuje eulerovský ťah.
- *hranový rez* S v súvislom grafe grafe G je množina hrán taká, že $G - S$ je nesúvislý graf

Lema 3.1. *Nech G je graf, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň 2. Potom G obsahuje kružnicu.*

Dôkaz. Nech $P = v_1 v_2 \dots v_n$ je najdlhšia cesta v G. Vrchol v_1 musí mať okrem v_2 ešte aspoň jedného suseda, keďže v_1 je stupňa aspoň 2. Nech x je sused vrchola v_1 a $x \neq v_1$. Vzhľadom na to, že P je najdlhšia cesta, musí x patriť P, čiže $x = v_i$ pre nejaké $i > 2$. Potom $v_1 v_2 \dots v_i v_1$ je kružnica v grafe G. □

♣ Je pravda, že v grafe, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň 2 leží každý vrchol na kružnici?

Veta 3.2. *Nasledujúce tvrdenia sú v súvislom netriviálnom grafe G ekvivalentné.*
(a) *G je eulerovský*
(b) *stupeň každého vrchola grafu G párny*
(c) *každý hranový rez grafu G má párny počet hrán*
(d) *hranová množina grafu G sa dá rozložiť na množinu kružníc*

Dôkaz. Dokážeme nasledujúce implikácie: (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).

$(a) \Rightarrow (c)$ Nech G je eulerovský graf a nech S je hranový rez v G. Odobratím S z G dostaneme dva grafy, povedzme G_1 a G_2. Prechádzajme teraz po ľubovoľnom eulerovskom ťahu v G. Zjavne, pre hrany z S platí, že ich prechádzame striedavo, jednu hranu v smere z G_1 do G_2 a ďalšiu naopak. Keďže skončíme v tom G_i, v ktorom sme začali, hrán prejdených z G_1 do G_2 je rovnako veľa, ako hrán prejdených z G_2 do G_1, a teda S musí obsahovať párny počet hrán, pozri Obr. 8a.

$(c) \Rightarrow (b)$ hrany incidentné s jedným vrcholom tvoria hranový rez, takže tvrdenie (b) vyplýva z tvrdenia (c), pozri Obr. 8b.

(a) Implikácia $(a) \Rightarrow (c)$

(b) Implikácia $(c) \Rightarrow (b)$

Obr. 8

$(b) \Rightarrow (d)$ Majme graf G, ktorého každý vrchol má párny stupeň. Keďže G je podľa predpokladu súvislý a netriviálny, neobsahuje vrcholy stupňa 0, a teda každý jeho stupeň je aspoň 2. Podľa Lemy 3.1 graf G obsahuje kružnicu, povedzme C. Odobratím jej hrán a následne izolovaných vrcholov dostávame graf, ktoré každý komponent má všetky vrcholy párneho stupňa. Opakovaním tohto postupu, môžeme hranovú množinu každého z týchto komponentov rozložiť na množinu kružníc, ktoré spolu s C tvoria rozklad hranovej množiny grafu G na množinu kružníc.

$(d) \Rightarrow (a)$ Pre dôkaz tejto implikácie predpokladajme, že G je súvislý graf, ktorého hranová množina sa dá rozložiť na kružnice a ukážeme, že G obsahuje eulerovský ťah. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet kružníc. Za bázu zoberieme prípad, keď je v rozklade jediná kružnica, tá je potom zároveň aj eulerovským ťahom.

Predpokladajme teda, že v rozklade grafu G je k kružníc, povedzme $C_1, C_2, \ldots, C_k$ a pre všetky súvislé grafy, ktoré majú rozklad na menej, ako k kružníc tvrdenie platí. Zostrojme G' z grafu G tak, že odoberieme hrany kružnice C_k. Dostaneme niekoľko (možno jeden) komponentov, z ktorých každý je zjednotením hranovo dizjunktných kružníc, a teda, podľa indukčného predpokladu každý z týchto komponentov obsahuje eulerovský ťah. Skonštruujme teraz eulerovský ťah v G. Postupujme postupne po kružnici C_k a vždy, keď sa dostaneme ku komponentu, ktorý ešte nie je zapojený v ťahu, použime eulerovský ťah v ňom. Takto postupne na C_k "prilepíme"ťahy zo všetkých komponentov grafu $G - E(C)$ a dostaneme eulerovský ťah v G. $\square$

4 Súvislosť

- Už vieme, čo znamená, že graf je *súvislý* a čo je to *komponent* grafu.
- *artikulácia* je vrchol, odobratím ktorého vznikne graf s viac komponentmi, ako mal pôvodný graf; podobne *most* je hrana, odobratím ktorej vznikne graf s viac komponentmi, ako mal pôvodný graf
- *blok* – maximálny súvislý podgraf bez artikulácií
- ak z grafu odoberáme vrchol, tak s ním musíme odobrať aj všetky hrany s ním incidentné. Ak z grafu odoberáme hranu, koncové vrcholy ponechávame. Ak W je množina vrcholov alebo graf a z je vrchol, tak $W - \{z\}$ zapisujeme aj $W - z$. Obdobné platí, ak ide o hranu.
- G sa nazýva *k-súvislým* ak $|V(G)| > k$ a pre každú množinu vrcholov $X \subseteq V$ takú, že $|X| < k$ platí, že graf $G - X$ je súvislý. Najväčšie celé číslo k také, že G je k-súvislý sa nazýva *súvislosť* $\kappa(G)$ grafu G.
- čiže $\kappa(K_1) = 0$, $\kappa(G) = 0$ pre nesúvislý graf G, $\kappa(K_n) = n - 1$ pre všetky $n \geq 1$
- graf G sa nazýva *hranovo l-súvislý* ak $|V(G)| > 1$ a pre každú množinu hrán F grafu G takú, že $|F| < k$ je graf $G - F$ súvislý. Najväčšie celé číslo l také, že G je hranovo l-súvislý sa volá *hranová súvislosť* $\lambda(G)$ grafu G.
- $\lambda(G) = 0$ ak G je nesúvislý

♣ Je pravda, že ak $d(v) \geq 2$ pre všetky vrcholy grafu G, tak G je vrcholovo 2-súvislý?

Tvrdenie 4.1. *Ak G je netriviálny, tak $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Dôkaz. Druhá nerovnosť vyplýva z toho, že všetky hrany ohraničujúce vrchol tvoria hranový rez. Predpokladajme teraz, že F je minimálna množina hrán, taká že $G - F$ je nesúvislý. Ukážeme, že $\kappa(G) \leq |F|$.

Najprv predpokladajme, že G obsahuje vrchol v, ktorý nie je incidentný so žiadnou hranou z F. Nech C je komponent grafu $G - F$, ktorý obsahuje v. Potom vrcholy $C \cap F$ oddeľujú v od $G - C$ a teda $\kappa(G) \leq |F|$.

Predpokladajme teraz, že každý vrchol grafu G je incidentný s hranou z F. Nech v je ľubovoľný vrchol grafu G a nech C je komponent grafu $G - F$, ktorý obsahuje vrchol v. Potom susedia v v C sú incidentní s rôznymi hranami z F a teda $d(v) \leq |F|$. Ak $V(G) \neq \{v\} \cup N(v)$, tak $N(v)$ separuje v od zvyšku grafu. Inak $V(G) = \{v\} \cup N(v)$. Túto úvahu môžeme urobiť pre ľubovoľný vrchol. Buď teda existuje v G vrchol x taký, že $N(x)$ separuje x od zvyšku grafu alebo pre všetky $x \in V(G)$ platí, že $V(G) = \{x\} \cup N(x)$. V druhom prípade je G kompletný graf a tvrdenie platí, lebo $\kappa(G) = \lambda(G) = |V(G)| - 1$. □

4.1 2-súvislé grafy

- Nech H je graf. Cestu dĺžky aspoň 1 nazveme *H-cestou*, ak zdieľa s H práve svoje koncové vrcholy. Ak $u, v \in V(H)$ a hrana $uv \notin E(H)$, tak uv je H-cesta.

Tvrdenie 4.2. *Graf je 2-súvislý, práve vtedy, ak sa dá skonštruovať z kružnice postupným pridávaním H-ciest k už skonštruovanému grafu H.*

Dôkaz. ($\Leftarrow$) Ak graf je skonštruovaný tak, ako je napísané, je 2-súvislý.
($\Rightarrow$) Predpokladajme, že G je 2-súvislý. Potom G obsahuje kružnicu. Nech H je maximálny podgraf grafu G, ktorý sa dá skonštruovať ako je napísané. Keďže každá hrana z $E(G) - E(H)$ by bola H-cestou, graf H je indukovaný podgraf grafu G. Ak $H \neq G$, tak existuje vrchol $v \in G - H$. Z toho, že G je súvislý vyplýva, že môžeme predpokladať, že v je susedný s vrcholom $w \in H$. Keďže G je 2-súvislý, graf $G - w$ obsahuje v-H-cestu P. Potom wvP je H-cesta v G a $H \cup wvP$ je graf skonštruovaný podľa zadania a väčší ako H, spor. □

Dôsledok 4.3. *V 2-súvislom grafe leží každý vrchol na kružnici.*

Dôkaz. Nech G je 2-súvislý. Dokážeme, že každý vrchol v leží na kružnici. Podľa Tvrdenia 4.2 sa G dá skonštruovať z kružnice, povedzme C, postupným pridávaním H-ciest. Ak $v \in V(C)$, tak nie je čo dokazovať. Inak v bol pridaný ako súčasť niektorej z H ciest k už skonštruovanéhmu grafu. Nech X je táto H-cesta a predpokladajme, že bola pridaná k podgrafu G_1 grafu G. Nech p a q sú koncové vrcholy cesty X. Keďže G_1 je súvislý, musí obsahovať p-q-cestu, povedzme Y. Potom ale $X \cup Y$ je kružnica, ktorá obsahuje v. □

Tvrdenie 4.4. *Každé dva vrcholy v 2-súvislom grafe ležia na spoločnej kružnici.*

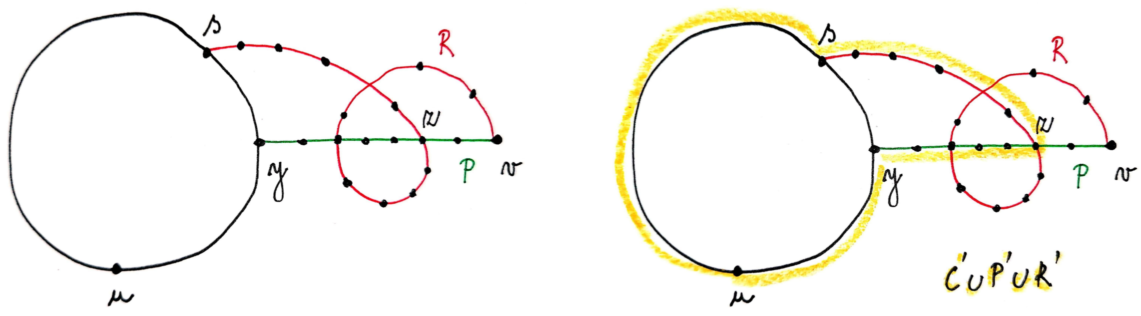
Dôkaz. Sporom predpokladajme, že u a v sú dva vrcholy 2-súvislého grafu G, ktoré neležia na spoločnej kružnici. Keďže G je 2-súvislý graf, podľa Dôsledku 4.3 vrchol u leží na nejakej kružnici. Nech C je kružnica, ktorej patrí vrchol u a zároveň vzdialenosť C a v je minimálna, pričom vzdialenosť vrchola v a kružnice C je definovaná
$dist(v, C) = \min\{dist(v, x) | x \in V(C)\}$,
čiže je to vzdialenosť v od toho vrcholu C, ktorý je k v najbližšie. Nech P je cesta, kde sa $dist(v, C)$ nadobúda. Nech y je spoločný vrchol C a P. Keďže predpokladáme, že neexistuje kružnica v G, ktorá by obsahovala oba vrcholy u a v, cesta P má nenulovú dĺžku. Graf G je 2-súvislý, a teda graf $G - y$ je súvislý, a tak v $G - y$ existuje cesta medzi v a niektorým vrcholom z $V(C) - y$, nech R je najkratšia taká cesta a nech druhý koniec R je vrchol s. Nech z je posledný vrchol cesty R, ktorý patrí P ak postupujeme od v k vrcholu z $V(C) - y$, pozri Obr. 9a. Nech P' je podcesta cesty P s koncovými vrcholmi y a z, R' je podcesta cesty R s koncovými vrcholmi s a z a C' je podcesta kružnice C s koncovými vrcholmi s a y, ktorej patrí vrchol u. Potom $C' \cup P' \cup R'$, ktorej patrí vrchol u a jej vzdialenosť od v je menšia, ako vzdialenosť C od v, čo je v spore s výberom kružnice C, pozri Obr. 9b. Tým je dôkaz ukončený. □

5 Planárne grafy

- graf sa nazýva *planárny* ak sa dá nakresliť v rovine tak, že hrany majú prienik iba na ich koncoch

♣ Nahliadnite, že graf $K_5 - e$ je planárny.

Veta 5.1. *Graf je vnoriteľný do roviny práve vtedy, keď je vnoriteľný do sféry.*



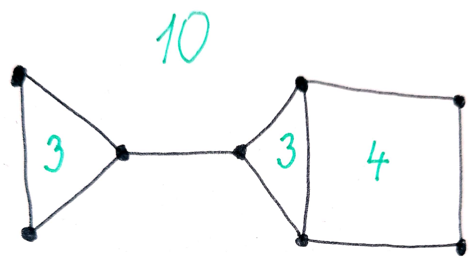
(a) (b)

Obr. 9

- Rovinný graf rozdelí rovinu na lineárne súvislé otvorené množiny. Tieto množiny sa volajú *oblasti*.

- Každý rovinný graf má práve jednu neohraničenú oblasť, ktorú voláme *vonkajšia oblasť*.

- *Dĺžka oblasti* je dĺžka uzavretého sledu, ktorý danú oblasť ohraničuje, pozri Obr. 10.



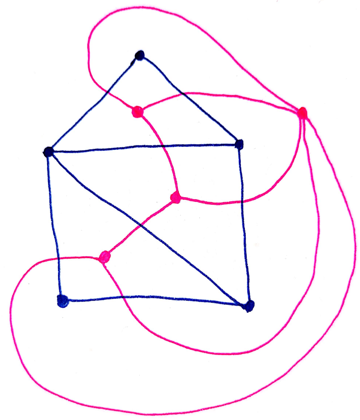
Obr. 10: Rovinný graf s dĺžkami oblastí. Všimnite si, že v dĺžke vonkajšej oblasti je jedna hrana zarátaná dvakrát, lebo ohraničujúci sled používa túto hranu dvakrát.

Tvrdenie 5.2. *Nech G je planárny graf a nech f je oblasť v nejakom jeho planárnom nakreslení. Potom G má rovinné nakreslenie také, ktorého vonkajšia oblasť má rovnakú hranicu ako f.*

- *duálny graf* Nech $G = (V, E)$ je rovinný graf. *Duálny graf* $G^* = (V^*, E^*)$ ku grafu G je rovinný graf, v ktorom každý vrchol z V^* zodpovedá jednej oblasti grafu G a za každú hranu e z E má graf G^* hranu spájajúcu dva vrcholy zodpovedajúce oblastiam oddeleným hranou e. Čiže graf G^* môže mať násobné hrany (ak G mal vrcholy stupňa 2) a slučky (ak G mal mosty), pozri Obr. 11.

Veta 5.3 (Eulerova formula)**.** *Pre každý súvislý rovinný graf G platí*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$



Obr. 11: Ružový graf je duálny k modrému a naopak

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán.
Ak G je strom, tak $|V(G)| = |E(G)| + 1$ a $|F(G)| = 1$, a tvrdenie platí.

Inak, ak G nie je strom, zoberme hranu $e \in G$, ktorá leží na kružnici. Nech $G' = G - e$. Potom G' je súvislý rovinný graf, $E(G') = E(G) - 1$, $V(G)' = V(G)$ a $F(G') = F(G) - 1$. Z indukčného predpokladu, $|V(G')| - |E(G') + |F(G')| = 2$ a teda aj $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$. □

Dôsledok 5.4. *Každé rovinné vnorenie súvislého planárneho grafu má rovnaký počet oblastí.*

Dôsledok 5.5. *Nech G je planárny graf s aspoň tromi vrcholmi. Potom*
(a) $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$
(b) *ak G nemá trojuholníky, tak* $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

Dôkaz. (a) Majme nejaké rovinné nakreslenie grafu G. Potom

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} d(f) \geq 3|F(G)| = 3(|E(G)| - |V(G)| + 2),$$

pričom posledná vyplýva z Eulerovej formuly. Úpravou dostávame:

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

(b) Obdobne, ako v (a),

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} d(f) \geq 4|F(G)| = 4(|E(G)| - |V(G)| + 2),$$

z čoho dostávame

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

□

♣ Kde sme v predchádzajúcom dôsledku využili, že graf má aspoň tri vrcholy?

Dôsledok 5.6. *Každý planárny graf má vrchol stupňa najviac 5.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že v planárnom grafe G sú všetky vrcholy stupňa aspoň 6. Potom $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6|V(G)|$ a teda $|E(G)| \geq 3|V(G)|$, spor. □

Dôsledok 5.7. *Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú planárne.*

Dôkaz. Sporom predpokladáme, že sú planárne a z počtu vrcholov a hrán odvodíme spor. □

Nasledujúcu vetu, ktorá charakterizuje planárne grafy uvedieme bez dôkazu.

Veta 5.8 (Kuratowski 1930, Wagner 1937)**.** *Graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje subdivíziu K_5 ani $K_{3,3}$.*

6 Farbenia grafov

- *vrcholové farbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : V \to S$, prvkom množiny S hovoríme aj farby
- *vrcholové k-farbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$; čísla $1, 2, \ldots, k$ nazývame aj *farbami*
- *hranové k-farbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$
- *regulárne* farbenie – susedné objekty majú rôzne farby
- graf je (vrcholovo/hranovo) k-zafarbiteľný ak má vrcholové/hranové k-zafarbenie
- *chromatické číslo* $\chi(G)$ je najmenšie k také, že G má (vrcholové) k-farbenie
- *chromatické index* $\chi'(G)$ je najmenšie k také, že G má hranové k-farbenie

6.1 Vrcholové farbenia

Majme graf G, ktorý chceme regulárne vrcholovo zafarbiť. Pozrime sa na jednoduchý greedy algoritmus. Zoraďme vrcholy grafu G do ľubovoľného poradia a v tomto poradí ich farbíme tak, že pre daný vrchol vždy použijeme farbu s najnižším číslom, ktorá nie je použitá na jeho susedov. Keďže každý vrchol má najviac $\Delta(G)$ susedov, použijeme najviac $\Delta(G) + 1$ farieb, a teda platí, že $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

♣ Nájdite príklady grafov, kde je uvedený odhad tesný, teda platí $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Nasledujúcu vetu uvedieme bez dôkazu.

Veta 6.1 (Brooks, 1941)**.** *Nech G je súvislý graf. Ak G nie je kompletný graf ani nepárna kružnica, tak*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

6.2 Farbenia planárnych grafov

Problém štyroch farieb. *Dokážte, že oblasti ľubovoľného rovinného grafu bez mostov možno zafarbiť najviac štyrmi farbami tak, aby susedné oblasti (tie, čo majú spoločnú hranu na hranici) boli zafarbené rôznou farbou.*

história

- 1852 - najstaršia známa zmienka: Francis Guthrie položil svojmu bratovi Frederikovi túto otázku
- 1878 - Cayley prezentoval tento problém Londýnskej Matematickej Spoločnosti
- 1878 - Taitov nesprávny "dôkaz"
- 1879 - Kempe publikoval nesprávny "dôkaz"
- 1890 - Heawood modifikoval Kempeho "dôkaz"na dôkaz vety o piatich farbách
- 1977 - prvý všeobecne akceptovaný dôkaz Appel and Haken; tento dôkaz bol urobený s pomocou počítaču

- napriek rôznym skráteniam dôkazu, dodnes nie je známy dôkaz, ktorý by nebol počítačovo závislý

- Majme rovinný graf G. Duálnym grafom G^* ku grafu G nazveme taký graf, ktorého vrcholy zodpovedajú oblastiam grafu G a dva vrcholy sú spojené hranou ak zodpovedajúce odblasti zdieľajú spoločnú hranu, pozri Obr. **??**.!!! nasobne hrany

Zduality vyplýva ekvivalentná formulácia Problému štyroch farieb:

Pre každý rovinný graf G (bez slučiek) platí $\chi(G) \leq 4$.

Dokážeme tu slabší variant, a to že 5 farieb stačí na regulárne zafarbenie každého planárneho grafu. Predtým však dokážeme nasledujúcu lemu o prítomnosti vrchola s malým stupňom v každom planárnom grafe.

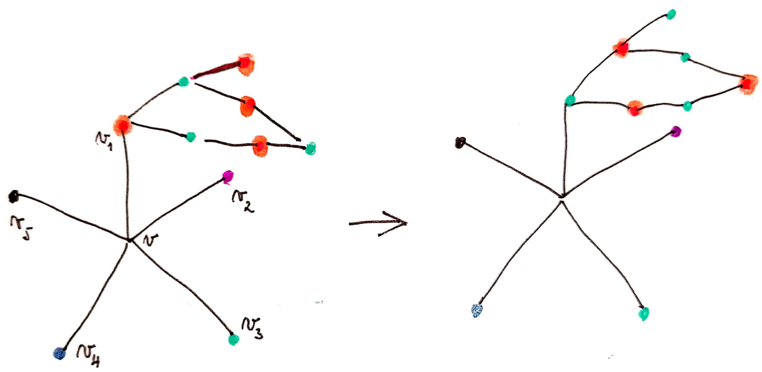
Lema 6.2. *Každý planárny graf obsahuje vrchol stupňa nanajvýš 5.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že G je planárny graf a že $\delta(G) \geq 6$. Keďže platí, že $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$ a podľa predpokladu lemy $d(v) \geq 6$ pre všetky vrcholy grafu G, platí, že $E(G) \geq 3|V(G)|$. To je ale v spore s Dôsledkom 5.5. $\square$

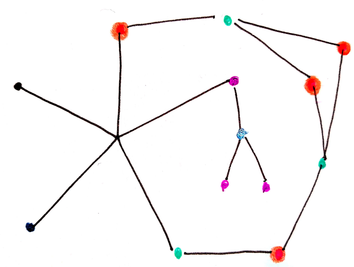
Veta 6.3 (Heawood, 1890)**.** *Pre každý planárny graf G platí $\chi(G) \leq 5$.*

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou na počet vrcholov. Báza indukcie zrejme platí. Podľa Lemy 6.2, každý planárny graf má vrchol stupňa nanajvýš 5, povedzme v. Podľa indukčného predpokladu, graf $G - v$ má (vrcholové) 5-zafarbenie. Ak je nejaká farba z $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ nepoužitá na suseda vrchola v, dofarbíme touto farbou vrchol

v a máme regulárne zafarbenie všetkých vrcholov. Inak môžeme predpokladať, že susedia v v G sú $v_1, v_2, \ldots, v_5$ v cyklickom poradí podľa vnorenia a v_i je zafarbený farbou i. Podgraf indukovaný vrcholmi ľubovoľných dvoch farieb je bipartitný. Ak komponent grafu $G - v$, indukovaný farbami 1 a 3 obsahujúci v_1 neobsahuje v_3, vymeníme farby v tomto komponente a vrchol v zafarbíme farbou 1, Obr. 12. Predpokladajme teda, že komponent grafu $G - v$, indukovaný farbami 1 a 3 obsahujúci v_1 obsahuje v_3. Potom ale, keďže graf je planárny, komponent indukovaný farbami 2 a 4 obsahujúci v_2 neobsahuje v_4, Obr. 13. Prefarbíme tento komponent a zafarbíme v farbou 2. □



Obr. 12



Obr. 13

6.3 Hranové farbenia

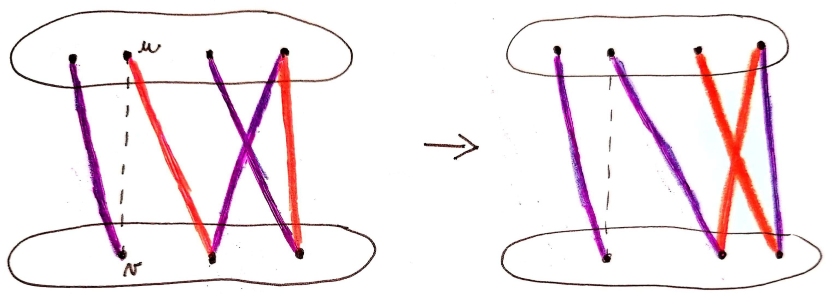
- je zrejmé, že platí $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

Veta 6.4 (König, 1916)**.** *Pre každý bipartitný graf G platí $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán. Ak $|E(G)| = 0$ tvrdenie platí. Majme teraz graf bipartitný graf G a predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky bipartitné grafy s menším počtom hrán. Vyberme $e \in E(G)$ a vytvorme graf $H := G - e$. Ak $\Delta(H) < \Delta(G)$, tak použijeme $\Delta(H)$ farieb na graf H a novou farbou zafarbíme hranu e. Predpokladajme teda, že $\Delta(H) = \Delta(G)$. Nech $e = uv$. Keďže stupeň $|E(H)| < |E(G)|$, môžeme použiť indukčný predpoklad na graf H a zafarbiť jeho hrany $\Delta(G)$ farbami, nech $f : E(G) \to \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$ je takéto hranové farbenie. Stupne vrcholov u a v sú v grafe

H menšie, ako $\Delta(G)$, a teda pre každý z týchto vrcholov existuje farba z $\{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$, ktorá vo farbení f nie je použitá na hranu incidentnú s daným vrcholom. Nech vo vrchole u nie je prítomná farba α a vo vrchole v nie je prítomná farba β (ak vo vrchole chýba viacero farieb, vyberieme ľubovoľnú z nich). Ak platí $\alpha = \beta$, dofarbíme hranu e farbou α a máme hranové farbenie grafu G.

Nech teda $\alpha \neq \beta$. Nech P je nepredĺžiteľná cesta, ktorá začína vo vrchole u a používa len farby α a β (nahliadnite, že je to cesta). Cesta P nemôže končiť vo vrchole v. Ak by to tak bolo, tak cesta P by bola párnej dĺžky, keďže sa na nej striedajú hrany farieb α a β a v u chýba α a vo v chýba β. Teda $P \cup e$ je kružnica nepárnej dĺžky, čo je v bipartitnom grafe nemožné podľa Vety 2.2. To znamená, že P končí v inom vrchole ako v (a zjavne cez v ani neprechádza). Vymeníme farby α a β dostaneme iné regulárne hranové farbenie, povedzme f'. Vo farbení f' je farba β neprítomná v oboch vrcholoch u aj v, pozri Obr. 14. Dofarbením hrany e farbou β dostávame hranové farbenie grafu G. $\square$



Obr. 14

Poznamenajme, že nepredĺžiteľnej 2-farebnej ceste sa hovorí *Kempeho reťazec* a výmene farieb na nej sa nazýva *Kempe prepnutie.*

Veta 6.5 (Vizing, 1964)**.** *Pre každý jednoduchý graf G platí*

$$\Delta(G)\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$