Domáce úlohy z Matematickej propedeutiky 1

Odovzdať do 30. 11. 2024:

1. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie $f(x) = \log_2(\sin 3x + \cos 3x)$.
2. Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok? (Nestačí odvodiť „hocijaké“ vzorce: z riešenia musí byť jasné, že uvedené počty sú celé čísla.)
3. Traja poslanci robia správne rozhodnutia s pravdepodobnosťou postupne 7/10, 8/10 a 9/10. Pri hlasovaní rozhoduje väčšina hlasov. Je lepšie, ak bude každý hlasovať nezávisle, alebo by dvaja menej schopní poslanci mali kopírovať hlasovanie toho najschopnejšieho? (Návod: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403847`)
4. Dokážte, že číslo $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ je iracionálne.
5. Dokážte, že pre každé celé $n > 2$ platí $\sqrt[n]{n} + \dfrac{1}{n} < 2$.
(Návod: uvažujte o hornom ohraničení množiny $\{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.)
6. Dokážte, že ak a a n sú nepárne kladné celé čísla, tak 2^{n+1} delí $a^{2^n} - 1$.
(Pozor: $x^{y^z} = x^{(y^z)}$.)
7. Rozhodnite, či možno nájsť v $\mathbb{R}^3$ nekonečnú množinu vektorov takú, že každé tri jej prvky tvoria bázu. (Svoje tvrdenie poriadne zdôvodnite.)

(pokračovanie na ďalšej strane)

Odovzdať do 9. 12. 2024:

8. V skupine n ľudí ($n \geq 4$) sa niektorí poznajú. Vzťah „poznať sa" je vzájomný: ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A a nazývame ich dvojicou známych. Rozhodnite, či v skupine šiestich osôb môžu byť v každej štvorici práve tri dvojice známych a práve tri dvojice neznámych.

9. Nájdite všetky reálne čísla k také, že nerovnosť $x^3+kx+1 \geq 0$ platí pre všetky kladné reálne čísla x.

10. Pre každé nezáporné celé číslo n platí $7 \mid 2^{2n+1} + 5^{2n+1}$.
(a) Dokážte toto tvrdenie matematickou indukciou.
(b) Dokážte toto tvrdenie pomocou počítania zvyškov mocnín čísel 2 a 5 po delení 7 bez využitia indukcie.

11. Nájdite racionálne čísla a, b, c, d také, že pre každé prirodzené číslo n platí
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = an^3 + bn^2 + cn + d.$$
Dokážte, že nájdené čísla majú požadovanú vlastnosť.

12. Nájdite najväčšie kladné celé číslo d, ktoré má vlastnosť, že pre ľubovoľné kladné celé číslo n je hodnota výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ násobkom čísla d. (Vaše riešenie musí zdôvodniť, že nájdené číslo vyhovuje, a aj to, že je najväčšie vyhovujúce.)

13. Uvažujme Fibonacciho postupnosť $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pre $n \geq 2$).
(a) Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné celé čísla m, n je číslo $F_mF_n + F_{m+1}F_{n+1}$ členom Fibonacciho postupnosti.
(b) Dokážte, že pre ľubovoľné kladné celé čísla k, n je F_{kn} násobkom F_n.

14. Uvažujme výnos akciového trhu 9% p. a. (každý rok rovnaký, pre všetky investície uvažované nižšie) a dobu sporenia 40 rokov. (Pri riešení môžete využiť tabuľkový kalkulátor či odvodiť všeobecné vzorce.)

    (a) Zvažujeme dve rôzne investície 1000 eur:
    A. Do aktívne spravovaného podielového fondu s ročným poplatkom 1,5% z hodnoty investície na konci roka.
    B. Do pasívneho indexového ETF (fond obchodovaný na burze) s ročným poplatkom 0,2% z hodnoty investície na konci roka.
    Uvažujeme nulové zdanenie výnosov. Porovnajte výslednú hodnotu investovaných peňazí. (Pointa: na poplatkoch záleží.)

    (b) Uvažujme sadzbu dane z výnosov 19% a nulové poplatky. Akú sumu našetríme pri pravidelnom mesačnom vkladaní 200 eur, ak sa výnosy zdaňujú len raz na konci, a akú, ak by sa výnosy zdaňovali každoročne na konci roka? (Pointa: Na spôsobe zdaňovania záleží.)
    (Návod: napr. `https://www.investopedia.com/terms/c/compoundinterest.asp`.)