

Úlohy 1 až 5 treba odovzdať najneskôr **16. 4. 2025**.

1. Nech  $a, b, c$  sú čísla z intervalu  $(0, 2)$ , ktorých súčet je 3. Dokážte, že platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9.$$

2. Nájdite všetky celé čísla  $a$ , pre ktoré je  $a^6 + a + 2$  druhou mocninou celého čísla.  
(Návod: zadané číslo sa od istej druhej mocniny líši len o málo.)
3. Určte počet reťazcov dĺžky  $n$  nad abecedou  $\{a, b, c\}$ , ktoré neobsahujú podreťazec  $bc$ .  
(Za explicitné vyjadrenie výsledku bude viac bodov ako za iba rekurentné.)
4. Vypočítajte

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i i + j.$$

5. (a) Zistite, koľko násobení a delení (spolu, v závislosti od  $n$ ) sa vykoná pri spustení nasledujúceho programu. (Program rieši systém lineárnych rovníc  $Lx = B$  s dolnou trojuholníkovou maticou  $L$  rozmerov  $n \times n$  za predpokladu, že diagonálne prvky matice  $L$  sú nenulové.)

```
void solveLowerTriangSystem(double **L, double *B, double *X, int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        X[i] = B[i];
        for (int j = 0; j < i; j++)
            X[i] -= L[i][j] * X[j];
        X[i] /= L[i][i];
    }
}
```

- (b) Vyjadrite ako funkciu  $n$  presný počet hviezdíčiek, ktoré vypíše nasledujúci kód v C pre dané  $n = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

```
for (int i = 1; i <= n; i *= 2)
    for (int j = 0; j < n; j += i)
        printf("*");
```

---

Úlohy 6 až 12 treba odovzdať najneskôr **7. 5. 2025**.

6. V kruhu s priemerom 5 je umiestnených 10 bodov. Dokážte, že niektoré dva z týchto bodov majú vzdialenosť najviac 2. (Ak úlohu neviete vyriešiť, skúste to s 13 bodmi v kruhu — korektné riešenie bude hodnotené 7 bodmi.)
7. Nájdite všetky polynómy  $P(x)$  s reálnymi koeficientmi také, že pre každé reálne číslo  $x$  platí  $P(2x) = 8P(x) + (x - 2)^2$ .
8. Nájdite všetky dvojice polynómov  $P, Q$  s reálnymi koeficientmi také, že pre každé reálne číslo  $x$  platí  $Q(x^2) = (x + 1)^4 - x(P(x))^2$ .
9. Analyzátor dychu bezchybne spozná prítomnosť alkoholu, ak človek pil; v prípade, že človek nepil, aj tak dá pozitívny výsledok v 3% prípadov. Pod vplyvom alkoholu jazdí priemerne jeden z tisíc vodičov.
- (a) Aká je pravdepodobnosť, že pozitívne testovaný vodič (náhodne vybraný) je naozaj opitý?
- (b) Ako sa pravdepodobnosť zmení, ak bol vodič na testovanie vybraný na základe pochybnej jazdy, o ktorej sa vie, že z takto jazdiacich ľudí je polovica opitá?
10. Dlhopis s istinou 1000 vypláca výnos (kupón) 30 po uplynutí 1 roka, 2 rokov, ..., 10 rokov. Po uplynutí 10 rokov dôjde tiež k vyplateniu istiny. Uvažujeme nulové zdanenie. Pri bankovom vklade sa úroky pripisujú raz ročne a rátajú sa aj úroky z úrokov, pri dlhopise kupónové výnosy nereinvestujeme.
- (a) Aký úrok by mala banka ponúknuť na termínovanom vklade na 10 rokov, aby vkladateľ získal presne taký istý celkový výnos po 10 rokoch ako pri kúpe dlhopisu za cenu rovnú istine? (Nebojte sa riešiť úlohu sčasti numericky, napr. experimentovaním v tabuľkovom kalkulátore; nemusíte mať odvodené všeobecné vzorce.)
- (b) Koľko by mal byť investor ochotný za tento dlhopis zaplatiť, ak banka ponúka na 10-ročnom vklade fixný úrok 5 % p. a.? (Inak povedané, počítame súčasnú hodnotu budúcich peňažných tokov majiteľa dlhopisu, ktorá závisí od úrokovej sadzby.)
- Literatúra: <https://www.investopedia.com/articles/03/082703.asp>
11. Koľko komponentov môže mať graf s  $n$  vrcholmi,  $n - 3$  hranami a neobsahujúci žiadne kružnice?
12. Pre funkciu  $T$  platí  $T(0) = 1$  a

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + 2T(\lfloor n/3 \rfloor) + n$$

pre každé kladné celé  $n$ . Rozhodnite, či platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n)}{n^2} = 0.$$