

---

## Úvod do kombinatoriky a teórie grafov – písomná skúška

Pondelok 1. júna 2020

- Čas na riešenie písomky je **120 minút**.
  - Z celkového počtu 60 bodov je potrebné získať aspoň 30.
  - Fotky vašich riešení pošlite mailom s predmetom **UKTG písomka 1** na **obe** adresy `edita.macajova@gmail.com`, `jozef.rajnik@fmph.uniba.sk`. Telo mailu môžete nechať prázdne.
-

1. (20 bodov) Pretekov v orientačnom behu sa zúčastní 100 pretekárov. Organizátori pretekárom priradili čísla od 1 do 100. Pretekári štartujú postupne, v minútových intervaloch. Koľko je možností štartovného poradia ak
- nie sú žiadne obmedzenia; (3 body)
  - pretekár číslo 47 sa ponáhľa, a preto musí štartovať najneskôr ako 50-ty v poradí; (3 body)
  - pretekár číslo 45 musí štartovať neskôr, ako pretekár číslo 77 (nie nutne hneď za ním); (3 body)
  - pretekári s číslami 1 až 25 sú z Klubu A, pretekári s číslami 26 až 50 sú z Klubu B, pretekári s číslami 51 až 75 sú z Klubu C a pretekári s číslami 76 až 100 sú z Klubu D. Prvý štartuje pretekár z Klubu A, nasleduje pretekár z klubu B, ďalej pretekár z klubu C, pretekár z klubu D. A znova podľa klubov ABCDABCDABCD.... (3 body)
  - pretekári číslo 13 a 18 sú favoriti, tak nemôžu štartovať hneď za sebou (ani v jednom z dvoch poradí); (4 body)
  - pretekár číslo  $i$  nemôže štartovať hneď za pretekárom  $(i + 1)$  pre žiadne  $i \in \{1, 2, \dots, 99\}$ . (4 body)

Svoje tvrdenia neformálne zdôvodnite.

2. (9 bodov) Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^n (2n - k) \binom{n}{k}.$$

Odvolávať sa môžete len na sumy, ktoré majú meno. Pokiaľ chcete použiť nejakú inú známou sumu, dokážte ju.

3. (5 + 10 bodov) Definujte  $f(n) = O(g(n))$ ,  $f(n) = \Omega(g(n))$ ,  $f(n) = \Theta(g(n))$ ,  $f(n) = o(g(n))$  a  $f(n) \sim O(g(n))$ .  
Nech  $f(n) = \frac{1}{9}n^8 - 112n^7 - 60n^5 + 13n^2$ . Rozhodnite, či platí

- |                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| a) $f(n) = O(n^8)$ ,      | d) $f(n) = o(n^8)$ , |
| b) $f(n) = \Omega(n^8)$ , | e) $f(n) \sim n^8$ . |
| c) $f(n) = \Theta(n^8)$ , |                      |

Svoje tvrdenia dokážte. Môžete využívať len definície. Pokiaľ chcete využiť nejaké tvrdenia o asymptotických odhadoch, dokážte aj tie.

4. (9 bodov) Sformulujte a dokážte Eulerovu vetu pre planárne grafy.
5. (7 bodov) Z čísel  $\{1, 2, \dots, 100\}$  vyberieme 51 čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve súdeliteľné čísla. (Súdeliteľné čísla sú také, ktoré majú spoločného deliteľa väčšieho ako 1.)