

---

## Úvod do kombinatoriky a teórie grafov – písomná skúška

Pondelok 15. júna 2020

- Čas na riešenie písomky je **120 minút**.
  - Z celkového počtu 60 bodov je potrebné získať aspoň 30.
  - Fotky vašich riešení pošlite mailom s predmetom **UKTG písomka 2** na **obe** adresy `edita.macajova@gmail.com`, `jozef.rajnik@fmph.uniba.sk`. Telo mailu môžete nechať prázdne.
-

1. (20 bodov) Majme množiny  $A = \{1, 2, \dots, a\}$  a  $B = \{1, 2, \dots, b\}$ , kde  $a \geq 21$ ,  $b \geq 3$  sú celé čísla. Určte, koľko existuje zobrazení  $f$  z množiny  $A$  do množiny  $B$  takých, že platí:
- a) nie sú žiadne obmedzenia; (2 body)
  - b)  $f(1) = 1$ ; (2 body)
  - c)  $f$  je injektívne; (2 body)
  - d)  $f$  je rastúce; (3 body)
  - e)  $f$  je neklesajúce; (4 body)
  - f) v zobrazení  $f$  sa práve 5 čísel množiny  $A$  zobrazí na číslo 1, práve 6 čísel na 2 a práve 10 čísel na 3; (4 body)
  - g) existuje také  $i \in A$ , pre ktoré platí  $f(i) = 1$ ; (3 body)

Svoje tvrdenia neformálne zdôvodnite.

2. (9 bodov) Dokážte, že

$$\sum_{k=0}^n k^5 = \Theta(n^6).$$

3. (7 + 8 bodov) Definujte pojmy súvislý graf,  $k$ -súvislý graf, hranovo  $k$ -súvislý graf, strom a kostra grafu. Majme tvrdenia

- (1) Graf  $G$  je hranovo  $k$ -súvislý.
- (2) Graf  $G$  je zjednotením  $k$  hranovo disjunktných kostier.

Pre každú z implikácií (1)  $\Rightarrow$  (2) a (2)  $\Rightarrow$  (1) rozhodnite, či platí pre všetky grafy  $G$  a všetky kladné celé čísla  $k$ .

4. (9 bodov) Vyslovte a dokážte princíp inklúzie a exklúzie.
5. (7 bodov) V štvorci  $10 \times 10$  cm je špecifikovaných 231 bodov. Dokážte, že existuje pravouhlý trojuholník s plochou  $1 \text{ cm}^2$ , ktorý obsahuje aspoň 3 z týchto bodov.