

---

## Úvod do kombinatoriky a teórie grafov – písomná skúška

Pondelok 29. júna 2020

- Čas na riešenie písomky je **120 minút**.
  - Z celkového počtu 60 bodov je potrebné získať aspoň 30.
  - Fotky vašich riešení pošlite mailom s predmetom **UKTG písomka 3** na **obe** adresy `edita.macajova@gmail.com`, `jozef.rajnik@fmph.uniba.sk`. Telo mailu môžete nechať prázdne.
-

1. (20 bodov) Na predmet UKTG sa prihlásilo 50 (rozlišiteľných) študentov. Študenti sú rozdelení na 3 krúžky: 20 študentov v 1INF1, 20 študentov v INF2 a 10 študentov v 1BIN. Každý z nich dostane presne jednu zo známok A, C, FX. Koľko je možností, ako môžu študenti dostať známky ak:
- a) nie sú žiadne obmedzenia; (2 body)
  - b) nikto nedostane FX; (2 body)
  - c) nikto nedostane FX a práve 17 študentov dostane A; (3 body)
  - d) 20 študentov dostane A, 25 študentov dostane C a 5 študentov dostane FX; (3 body)
  - e) Fero a Monika majú dostať rovnakú známku; (3 body)
  - f) aspoň jeden študent dostane FX; (3 body)
  - g) aspoň z jedného krúžku musia dostať všetci študenti rovnakú známku. (4 body)

Svoje tvrdenia neformálne zdôvodnite.

2. (9 bodov) Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

Odvolávať sa môžete len na sumy, ktoré majú meno. Pokiaľ chcete použiť nejakú inú známou sumu, dokážte ju.

3. (7 + 8 bodov) Definujte pojmy ťah, cesta, súvislý graf, eulerovský graf, stupeň vrchola. Dokážte, že graf je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a má všetky vrcholy párneho stupňa.
4. (9 bodov) Pre každé z nasledovných tvrdení rozhodnite, či je pravdivé:

- a)  $47 \cdot 2^n = O(3^n)$ ,
- b)  $47 \cdot 2^n = \Omega(3^n)$ ,
- c)  $47 \cdot 2^n = \Theta(3^n)$ ,
- d)  $47 \cdot 2^n = o(3^n)$ ,
- e)  $47 \cdot 2^n \sim 3^n$ .

Svoje tvrdenia dokážte. Môžete využívať len definície. Pokiaľ chcete využiť nejaké tvrdenia o asymptotických odhadoch, dokážte aj tie.

5. (7 bodov) Na štandardnú šachovnicu ( $8 \times 8$  políčok) umiestnime ľubovoľne 20 kráľov. Dokážte, že vždy možno spomedzi nich vybrať dvoch kráľov, ktorí sa navzájom ohrozujú.