

# UKTG skúška 1. termín

**Úloha 1.** (15 bodov) Sedmovú kartu definujeme ako prvok usporiadanú dvojicu z množiny  $K = F \times H$ , kde

$$F = \{\check{C}, \check{Z}, Z, G\} \quad \text{a} \quad H = \{7, 8, 9, 10, D, H, K, E\}$$

sú postupne množina farieb (červená, žltá, zelená, guľa) a množina hodnôt (7, 8, 9, 10, dolník, horník, kráľ, eso).

- (1 bod) Koľko je všetkých sedmových kariet?
- (3 body) Koľkými spôsobmi možno vybrať na ruku 4-prvkovú množinu kariet tak, aby obsahovala aspoň jedného horníka (hodnotu  $H$ )?
- (3 body) Koľkými spôsobmi možno vybrať na ruku 4-prvkovú množinu kariet tak, aby obsahovala dve dvojice kariet rovnakej farby (každá z dvojíc má inú farbu)?
- (3 body) Koľkými spôsobmi možno rozdať po 4 karty piatim hráčom? (Za rozdanie považujeme usporiadanú 5-ticu  $(A, B, C, D, E)$ , kde  $A, B, C, D, E$  sú navzájom disjunktné 4-prvkové podmnožiny  $K$ .)
- (5 bodov) Koľko existuje rôznych zamiešanií (permutácií) kariet, v ktorých sa nenachádzajú priamo za sebou štyri karty rovnakej hodnoty.

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite.

**Úloha 2.** (5 + 9 bodov) Formálne definujte kombinácie s opakovaním. Sformulujte a dokážte vetu o ich počte.

**Úloha 3.** (9 bodov) Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k}.$$

**Úloha 4.** (6 bodov) Nech  $f(n) = \frac{1}{5n} + \frac{3}{n^2}$ . Rozhodnite, či platí

- $f(n) = \Theta(n^{-1})$ ,
- $f(n) = \Theta(n^{-2})$ ,
- $f(n) = o(n^{-2})$ ,
- $f(n) = \omega(n^{-2})$ .

Všetky vaše tvrdenia zdôvodnite. Vychádzajte pri tom len z definícií. Nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o asymptotike z prednášky ani z cvičení.

**Úloha 5.** (9 bodov) Rozhodnite, či pre každý graf  $G$ , ktorého minimálny stupeň je aspoň 2, platí:

- Každý vrchol grafu  $G$  leží na kružnici dĺžky aspoň  $\delta(G) + 1$ .
- V grafe  $G$  existuje vrchol, ktorý leží na aspoň  $\delta(G) - 1$  kružniciach.

Vaše tvrdenia zdôvodnite

**Úloha 6.** (7 bodov) Na šachovnici  $8 \times 8$  zafarbíme 17 políčok načerveno. Dokážte, že v každom takomto zafarbení vieme nájsť dve červené políčka, ktoré susedia rohom alebo stranou.