

UKTG skúška 2. termín

7. 6. 2021

Úloha 1. (20 bodov) Skúšky z UKTG sa zúčastnilo 50 (rozlišiteľných) študentov. Každý z nich dostane zo skúšky práve jednu zo známok A, B, C, D, E, FX. Koľko je spôsobov, ako môžu študenti dostať známky, ak:

- a) (2 body) nie sú žiadne obmedzenia;
- b) (3 body) známku E dostalo práve 7 študentov
- c) (3 body) známku A dostalo práve 10 študentov, B dostalo 8 študentov a C dostalo 12 študentov;
- d) (3 body) študenti, ktorí sú priamo vedľa seba v abecednom poradí dostali rôzne známky;
- e) (3 body) aspoň jeden študent dostal A;
- f) (2 body) ak za rôzne považujeme práve tie možnosti, v ktorých sa niektorá známka vyskytla v inom počte – teda nás zaujíma iba koľkokrát sa vyskytla ktorá známka, nezáleží nám na tom, ktorí študenti ju dostali;
- g) (4 body) každú známku dostal aspoň jeden študent.

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite.

Úloha 2. (10 bodov) Vyslovte a dokážte princíp zapojenia a vypojenia (inklúzie a exklúzie).

Úloha 3. (9 bodov) Dokážte, že

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \Theta(\sqrt{n}).$$

Úloha 4. (6 + 7 bodov) Definujte pojmy: súvislý graf, stupeň vrchola, regulárny graf, bipartitný graf. Nech G je súvislý bipartitný 4-regulárny graf. Dokážte, že graf G ostane súvislý aj po odstránení ľubovoľnej hrany (jej koncové vrcholy neodstraňujeme).

Úloha 5. (8 bodov) Koľko najviac čísel možno vybrať spomedzi čísel $\{2, 3, \dots, 25\}$ tak, aby každé dve vybrané čísla boli nesúdeliteľné?