UKTG skúška 3. termín

14. 6. 2021

Úloha 1. *(20 bodov)* Trieda pozostávajúca z 28 (rozlíšiteľných) žiakov, 14 chlapcov a 14 dievčat, sa vybrala do kina. V kine majú kúpené lístky do 7. radu na sedadlá s číslami 1 až 28. Koľko je možností, ako sa žiaci môžu usadiť, ak

a) *(2 body)* nie sú žiadne obmedzenia;

b) *(3 body)* žiadni dvaja chlapci ani žiadne dve dievčatá nemôžu sedieť vedľa seba;

c) *(3 body)* Peter musí sedieť na sedadle s vyšším číslom ako Ľudka;

d) *(3 body)* Dušan musí sedieť na kraji radu;

e) *(3 body)* Adam a Eva nesmú sedieť pri sebe;

f) *(3 body)* pri prechádzaní radom zľava doprava nasledovné skupinky žiakov nesmú sedieť hneď za sebou v uvedenom poradí:

- Iveta, Nina, Filip;
- Urban, Kika, Tomáš, Gertrúda;
- Silvia, Lenka, Emil, Denis.

(Teda nasledovné rozsadenia sú dovolené:
…, Filip, Nina, Iveta, …; …, Silvia, Lenka, Tomáš, Emil, Denis, …)

g) *(3 body)* Koľkými spôsobmi si môžu žiaci medzi sebou rozdeliť 10 000 chipsov?

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite.

Úloha 2. *(9 bodov)* Dokážte, že graf G je strom práve vtedy, keď je G maximálny acyklický, t. j. G je acyklický, ale po pridaní hrany medzi ľubovoľné dva nesusedné vrcholy dostaneme cyklus.

Úloha 3. *(9 bodov)* Vypočítajte sumu

$$\sum_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{n}{k}.$$

(Bez dôkazu sa môžete odvolávať sa len na sumy, čo boli na prednáške.)

Písomka pokračuje na ďalšej strane.

Úloha 4. *(6 + 9 bodov)* Definujte pojmy: $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$, $f(n) = \Theta(g(n))$, $f(n) = o(g(n))$, $f(n) = \omega(g(n))$ a $f(n) \sim g(n)$ (nezabudnite v predpokladoch vysvetliť všetky použité premenné). Nech

$$f(n) = \frac{n^2}{3} - 6n + 2021$$

pre každé nezáporné prirodzené číslo n. Môžete predpokladať, že hodnoty $f(n)$ sú kladné. Rozhodnite, či platí:

a) $f(n) = O(n^3)$,

b) $f(n) = \Omega(n^3)$,

c) $f(n) = \Theta(n^2)$

d) $f(n) = o(n)$,

e) $f(n) = \omega(n)$,

f) $f(n) \sim n^2$.

Vaše tvrdenia formálne zdôvodnite, pričom vychádzajte len z definícií – nevyužívajte žiadne tvrdenia z asymptotiky či už z prednášky alebo cvičení. Viete však získať čiastkové body aj za iné zdôvodnenia.

Úloha 5. *(7 bodov)* Vykonáme 80 hodov piatimi hracími kockami (na každej sú čísla od 1 po 6) a pre každý hod zapíšeme súčet čísiel, ktoré na nich padli. Dokážte, že existujú štyri hody, pre ktoré sme dostali rovnaký súčet.