Semestrálna písomka z UKTG

8. 4. 2022

Úloha 1. *(6 bodov)* Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že nech si akokoľvek zvolíme n celých čísel, bude medzi nimi existovať dvojica, ktorej súčet alebo rozdiel je deliteľný číslom 35. Vaše tvrdenie dokážte.

Riešenie. Ukážeme, že hľadaným najmenším n je Ak vyberieme 18 čísel $0, 1, \dots, 17$, tak ich súčet je v rozmedzí od $0 + 1 = 1$ do $16 + 17 = 33$, teda nie je deliteľný 35. Absolútna hodnota ich rozdielu je nenulová (nemáme dve rovnaké čísla) a najviac $17 - 0 = 17$. Preto vyhovujúce n musí byť aspoň 19.

Teraz ukážeme, že spomedzi ľubovoľných 19 čísel možno vybrať dve s rozdielom alebo súčtom deliteľným 35. Rozdeľme si všetky celé čísla na 18 množín:

- M_0 obsahuje čísla dávajúce po delení 35 zvyšok 0.
- M_i pre $i \in \{1, 2, \dots, 17\}$ obsahuje čísla, ktoré dávajú po delení 35 zvyšok i alebo $35 - i$.

Keďže množín máme len 18, ale vyberaných čísel máme viac, tak z Dirichletovho princípu existujú dve čísla z rovnakej skupiny. Ak majú rovnaký zvyšok, tak ich rozdiel je deliteľný 35. Ak majú rôzne zvyšky, tak musí ísť o zvyšky i a $35 - i$, a teda ich súčet je deliteľný 35. Tým je riešenie dokončené. □

Úloha 2. *(1,5 + 2,5 + 4 + 4 = 12 bodov)* Predmetu Úvod do kombinatoriky a teórie grafov sa zúčastňuje 34 (rozlíšiteľných) študentov. Počas semestra môže každý z nich získať celočíselný počet bodov od 0 až po 50 bodov. Určte, koľko je možností, ako môžu študenti dostať body tak

a) aby všetci študenti dostali navzájom rôzne počty bodov;

b) aby aspoň jeden študent získal plný počet bodov;

c) aby keď si zoradíme študentov podľa abecedy, dostaneme neklesajúcu postupnosť bodov;

d) aby polovica študentov mala rovnaký počet bodov a zvyšná polovica tiež rovnaký počet bodov, ale iný ako v prvej polovici.

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite. Pre získanie plného počtu bodov treba výsledok uviesť v uzavretom tvare, teda bez súm, troch bodiek a podobne. Vyčíslovať výsledky nemusíte.

Riešenie. **a)** Ide priamo o variácie bez opakovania, ktorých je $51^{\underline{34}}$ (pozor máme spolu s nulou až 51 možných bodových ziskov).

b) Všetkých možností, ako môžu študenti dostať body je 51^{34}. Možností, kedy nikto nezíska plný počet bodov je 50^{34}. Preto možností, kedy aspoň jeden študent získa plný počet je $51^{34} - 50^{34}$.

c) Spomedzi 51 možných bodových ziskov vyberieme 34 hodnôt tak, že nám nezáleží na poradí a hodnoty sa môžu opakovať, teda ide o kombinácie bez opakovania. Tieto vybrané hodnoty možno jediným spôsobom usporiadať do neklesajúcej postupnosti a tak priradiť študentom. Preto hľadaný počet možností je $\binom{34+50}{34}$.

d) Vyberieme dvojicu $\{x, y\}$ bodov, ktoré sa budú medzi študentami vyskytovať. To vieme spraviť $\binom{51}{2}$ možnosťami. Dvojicu si označme tak, nech $x < y$. Teraz vyberieme polovicu študentov, teda 17, ktorí dostanú x bodov – $\binom{34}{17}$. Tým je jednoznačne určená polovica študentov, ktorí dostanú y bodov. Celkovo tak máme $\binom{51}{2}\binom{34}{17}$ možností. □

Úloha 3. *(6 bodov)* Dokážte, že pre každé nezáporné celé čísla a, b, c platí

$$\binom{a}{b}\binom{a-b}{c-1} + \binom{a}{c}\binom{b-1}{a-c}\!$$

Riešenie. **Riešenie cez algebraické úpravy.**

$$\binom{a}{b}\binom{a-b}{c-1}+\binom{a}{c}\binom{a-c}{b-1}=\binom{a}{b+c-1}\binom{b+c}{b}$$

$$\frac{a!}{b!(a-b)!}\frac{(a-b)!}{(c-1)!(a-b-c+1)!}+\frac{a!}{c!(a-c)!}\frac{(a-c)!}{(b-1)!(a-c-b+1)!}=\frac{a!}{(b+c-1)!(a-b-c+1)!}\frac{(b+c)!}{b!c!}$$

$$\frac{a!}{b!(c-1)!(a-b-c+1)!}+\frac{a!}{c!(b-1)!(a-c-b+1)!}=\frac{a!}{(a-b-c+1)!}\frac{(b+c)}{b!c!}\quad|\cdot\frac{a!}{b!c!}$$

$$\frac{c}{(a-b-c+1)!}+\frac{b}{(a-c-b+1)!}=\frac{b+c}{(a-b-c+1)!}\quad|\cdot(a-b-c+1)!$$

$$c+b=c+b$$

$$0=0$$

Riešenie cez počítanie dvomi spôsobmi. Budeme počítať, koľko existuje a-znakových slov, zložených z písmen A, B, C, ktoré obsahujú práve b písmen B, práve c písmen C a na prvom mieste nemajú A.

Vieme, že A sa nevyskytuje na $b+c$ pozíciách, z toho jedna z nich je isto prvá. Preto určíme $b+c-1$ zvyšných pozícií, kde nebude A, čo vieme spraviť $\binom{a}{b+c-1}$ spôsobmi. Následne z $b+c$ miest, kde nie sú A, vyberieme b, na ktorých bude B – $\binom{b+c}{b}$. Na zvyšných tak ostane C. Dostávame tak

$$\binom{a}{b+c-1}\binom{b+c}{b}\qquad\text{slov.}$$

Teraz vypočítame počet uvažovaných slov tak, že si ich rozdelíme podľa prvého písmena. Ak máme na začiatku C, tak potrebujeme zo všetkých a miest vybrať b, na ktorých budú B ($\binom{a}{b}$ spôsobov). Potom zo zvyšných $a-b$ miest vyberieme $c-1$ pre C (jedno C je už na začiatku slova), na čo máme $\binom{a-b}{c-1}$. V prípade, že na začiatku je B, tak analogicky máme $\binom{a}{c}$ možností pre výber miest pre C a následne $\binom{a-c}{b-1}$ možností pre výber miest pre zvyšných $b-1$ písmen b. Spolu tak máme

$$\binom{a}{b}\binom{a-b}{c-1}+\binom{a}{c}\binom{a-c}{b-1}\qquad\text{možností.}$$

Hľadaný počet slov sme vyjadrili dvomi spôsobmi, preto sa tieto počty možností rovnajú, čím sme dokázali identitu zo zadania. □

Úloha 4. *(6 bodov)* V závislosti od nezáporného celého čísla n vypočítajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n}(-2)^k(n-k)\binom{n}{k}.$$

Riešenie.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-2)^k(n-k)\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-2)^k(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-2)^k\frac{n!}{k!(n-k-1)!} = \\
&= \sum_{k=1}^{n}n(-2)^k\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\
&= n\sum_{k=1}^{n}(-2)^k\binom{n-1}{k} = \\
&= n\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k\binom{n-1}{k} + (-2)^0\binom{n-1}{0} - (-2)^0\binom{n-1}{0}\right) = \\
&= n\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-2)^k\binom{n-1}{k} - 1\right) = \\
&= n\left((-2+1)^{n-1} - 1\right) = \\
&= n\left((-1)^{n-1} - 1\right)
\end{aligned}
$$

$\square$