

Semestrálna písomka z UKTG

26. 4. 2023

Úloha 1. (16 bodov) Písomku z UKTG píše 40 študentov očíslovaných $1, 2, \dots, 40$. Z písomky možno získať celočíselný počet bodov od 0 do 30 (vrátane). Koľko je možných výsledkov písomky, ak:

- (1 b) nie sú žiadne ďalšie obmedzenia;
- (2 b) práve 25 študentov dostalo práve 17 bodov;
- (2 b) aspoň jeden študent dostal aspoň 27 bodov;
- (3 b) študent 1 dostal viac bodov ako študent 2;
- (2 b) študent 1 dostal aspoň 10 bodov, študent 2 dostal aspoň 15 bodov a všetci študenti (1 až 40) dostali v súčte práve 50 bodov.
- (6 b) Všetci študenti dostali v súčte 600 bodov.

Dva výsledky považujeme za rôzne práve vtedy, keď existuje študent, ktorý v nich dostal iný počet bodov.

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite. Výsledok uveďte v čo najjednoduchšom tvare. To môže byť aj suma, ak sa už nedá ďalej zjednodušiť. Vyčíslňovať výsledky nemusíte.

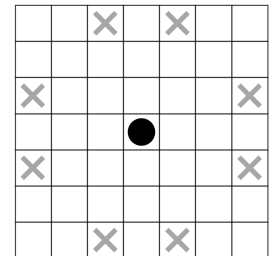
Úlohy 2 a 3 odovzdajte na samostatnom papieri.

Úloha 2. (7 bodov) Figúrka žrebec ohrozuje políčka, ktoré sú od neho vzdialené v jednom smere o 3 políčka v druhom (kolmom) smere o 1 políčko (ako na obrázku, kde je žrebec kruh a krížikom sú vyznačené ním ohrozované políčka).

Dokážte, že z každého rozloženia 19 žrebcov na šachovnicu rozmerov 9×9 možno vybrať 3 žrebce tak, aby sa žiadni dvaja z nich neohrozovali.

Úloha 3. (7 bodov) Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 0$ platí

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k} = n(n-1) \cdot 2^{n-2}.$$



Pripomíname, že sa nemôžete odvolávať na riešenie úloh z cvičení.