

Semestrálna písomka z UKTG

16. 4. 2024

Úloha 1. (16 bodov) Koľkými spôsobmi možno vyplniť tabuľku rozmerov 10×10 štvorcíkov číslami $1, 2, \dots, 11$ (do každého políčka napíšeme práve jedno číslo), ak:

- (1 b) nie sú žiadne ďalšie obmedzenia;
- (3 b) v tabuľke sa nachádza aspoň raz číslo 1;
- (3 b) v tabuľke je rovnako veľa párnych čísel ako nepárnych;
- (3 b) neexistuje riadok, ktorý by obsahoval dve rovnaké čísla;
- (3 b) každý riadok má čísla zoradené od najmenšieho po najväčšie (môžu sa aj opakovať);
- (3 b) čísla v prvom riadku tvoria zľava doprava rastúcu postupnosť (teda sa v rámci prvého riadku nemôžu opakovať) a taktiež aj čísla v prvom stĺpci zhora nadol tvoria rastúcu postupnosť (teda sa v rámci prvého stĺpca nemôžu opakovať).

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite. Výsledok uveďte v čo najjednoduchšom tvare. Vyčíslňovať výsledky nemusíte. Po formálnej stránke, za vyplnenie tabuľky považujeme zobrazenie $\{1, 2, \dots, 10\} \times \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 11\}$.

Úlohy 2 a 3 odovzdajte na samostatnom papieri.

Úloha 2. (7 bodov) Koľko najmenej podmnožín množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ musíme vybrať, aby medzi vybranými podmnožinami zaručene existovali aspoň dve disjunktné množiny?

Úloha 3. (7 bodov) V závislosti od prirodzeného čísla n vypočítajte sumu

$$\sum_{k=1}^n (n-k) \cdot 3^k \cdot \binom{n}{k}.$$

Semestrálna písomka z UKTG

16. 4. 2024

Úloha 1. (16 bodov) Koľkými spôsobmi možno vyplniť tabuľku rozmerov 10×10 štvorcíkov číslami $1, 2, \dots, 11$ (do každého políčka napíšeme práve jedno číslo), ak:

- (1 b) nie sú žiadne ďalšie obmedzenia;
- (3 b) v tabuľke sa nachádza aspoň raz číslo 1;
- (3 b) v tabuľke je rovnako veľa párnych čísel ako nepárnych;
- (3 b) neexistuje riadok, ktorý by obsahoval dve rovnaké čísla;
- (3 b) každý riadok má čísla zoradené od najmenšieho po najväčšie (môžu sa aj opakovať);
- (3 b) čísla v prvom riadku tvoria zľava doprava rastúcu postupnosť (teda sa v rámci prvého riadku nemôžu opakovať) a taktiež aj čísla v prvom stĺpci zhora nadol tvoria rastúcu postupnosť (teda sa v rámci prvého stĺpca nemôžu opakovať).

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite. Výsledok uveďte v čo najjednoduchšom tvare. Vyčíslňovať výsledky nemusíte. Po formálnej stránke, za vyplnenie tabuľky považujeme zobrazenie $\{1, 2, \dots, 10\} \times \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 11\}$.

Úlohy 2 a 3 odovzdajte na samostatnom papieri.

Úloha 2. (7 bodov) Koľko najmenej podmnožín množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ musíme vybrať, aby medzi vybranými podmnožinami zaručene existovali aspoň dve disjunktné množiny?

Úloha 3. (7 bodov) V závislosti od prirodzeného čísla n vypočítajte sumu

$$\sum_{k=1}^n (n-k) \cdot 3^k \cdot \binom{n}{k}.$$