UKTG skúška 1. termín

22. 5. 2024

Úlohy 1 a 2 odovzdajte na samostatnom papieri (papieroch)

Úloha 1. *(10 bodov)* Matka má cukríky 10 príchutí, z každej príchute po 15 kusov. Cukríky z rovnakej príchute sú navzájom nerozlíšiteľné. Koľkými spôsobmi možno

a) *(1 bod)* vybrať z nich 6 cukríkov navzájom rôznych príchutí (teda 6-prvkovú množinu);

b) *(1 bod)* zoradiť tieto cukríky do postupnosti;

c) *(4 body)* vybrať z nich multimnožinu obsahujúcu 90 cukríkov;

d) *(4 body)* rozdeliť tieto cukríky medzi 8 (rozlíšiteľných) detí?

Vaše tvrdenia neformálne dokážte. Výsledok uveďte v čo najjednoduchšom tvare (to môže byť aj suma, ak sa už nedá zjednodušiť).

Úloha 2. *(5 + 10 bodov)* Formálne definujte variácie s opakovaním, variácie bez opakovania, kombinácie bez opakovania a kombinácie s opakovaním.

Sformulujte a dokážte vetu o počte variácií bez opakovania. Bez dôkazu sa nemôžete odvolať na pravidlo súčinu, ani zovšeobecnené. Pre plný počet bodov treba formálny dôkaz.

Úlohy 3, 4, 5 a 6 odovzdajte na samostatnom papieri (papieroch)

Úloha 3. *(7 bodov)* Koľko najmenej čísel musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 34\}$, aby zaručene existovali dve čísla, ktorých súčet sa začína cifrou 3 (teda cifra 3 je na mieste desiatok)? Vaše tvrdenie dokážte.

Úloha 4. *(7 bodov)* V závislosti od nezáporných celých čísel vypočítajte sumu

$$\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell+1} \binom{n}{\ell} \binom{n}{k-1-\ell}.$$

Úloha 5. *(7 bodov)* Nech $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ je zobrazenie s predpisom $f(n) = \dfrac{1}{6\sqrt{n}} + \dfrac{10}{n}$. Rozhodnite, či platí

a) $f(n) = \Theta(\frac{1}{n})$,

b) $f(n) = \Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$,

c) $f(n) = o(1)$.

d) Nájdite také konštanty $a, b \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $f(n) \sim an^b$.

Vaše tvrdenia poriadne dokážte (v d) nemusíte dokazovať, že iné konštanty neexistujú). Pri dôkazoch vychádzajte len z definícií, bez odvolávania sa tvrdenia o asymptotických odhadoch.

Úloha 6. *(4 body)* Rozhodnite a následne dokážte, či existuje 11-vrcholový bipartitný graf taký, že vrcholy v jednej partícii majú postupne stupne 1, 2, 3, 3, 4 a vrcholy v druhej partícii majú postupne stupne 1, 1, 1, 3, 4, 5.