UKTG skúška 2. termín

29. 5. 2024

Úlohy 1, 2 a 3 odovzdajte na samostatnom papieri (papieroch)

Úloha 1. *(10 bodov)* Pod *sedmovou kartou* rozumieme usporiadanú dvojicu $(f, h) \in F \times H$, kde $F = \{\check{C}, \check{Z}, Z, G\}$ je množina farieb (červeň, žaluď, zeleň, guľa) a $H = \{7, 8, 9, 10,\}$

a) *(1 b)* Koľko existuje všetkých navzájom rôznych sedmových kariet?

b) *(1 b)* Koľkými spôsobmi možno vybrať na ruku sedem kariet?

c) *(2 b)* Koľkými spôsobmi možno vybrať na ruku sedem kariet tak, aby sme mali aspoň jednu sedmičku?

d) *(2 b)* Koľkými spôsobmi možno vybrať na ruku sedem kariet, ak karty rovnakej farby považujeme za nerozlíšiteľné?

e) *(4 b)* Koľkými spôsobmi možno zoradiť všetky karty do postupnosti tak, aby sa nikde v postupnosti nenachádzali za sebou štyri karty rovnakej hodnoty.

Vaše tvrdenia neformálne dokážte. Výsledok uveďte v čo najjednoduchšom tvare (to môže byť aj suma, ak sa už nedá zjednodušiť). Pri vyberaní kariet na ruku nám nezáleží na ich poradí.

Úloha 2. *(4 body)* Školu navštevuje 300 detí. Riaditeľka sa rozhodla, že na Medzinárodný deň dedí dá každému dieťaťu 5 cukríkov, pričom dieťa si môže vybrať ľubovoľne zo 6 druhov. Je isté, že aspoň 2 deti budú mať rovnakú sadu cukríkov? Vaše tvrdenie dokážte.

Úloha 3. *(10 bodov)* Cauchyho sčítací vzorec hovorí o tom, čomu sa rovná suma

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

Dokončite ho a dokážte.

Úlohy 4, 5, 6 a 7 odovzdajte na samostatnom papieri (papieroch)

Úloha 4. *(7 bodov)* Dokážte, že v každom rozmiestnení 33 kráľov na šachovnici 8×8 políčok existujú traja králi, z ktorých sa každí dvaja ohrozujú. Bolo by toto tvrdenie pravdivé, ak by sme uvažovali len 32 kráľov? Vaše tvrdenia dokážte.

(Kráľ ohrozuje políčka, ktoré s ním susedia vrcholom alebo stranou.)

Úloha 5. *(5 bodov)* Definujte pojmy $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$, $f(n) = \Theta(g(n))$, $f(n) = o(g(n))$ a $f(n) \sim g(n)$. (Nezabudnite uviesť predpoklady na f, g.)

Úloha 6. *(7 bodov)* Dokážte, že platí

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \Theta\left(\sqrt{n^3}\right).$$

Úloha 7. *(7 bodov)* Nech G je súvislý 4-regulárny graf. Dokážte, že graf G obsahuje dve kružnice, ktoré sú hranovo disjunktné a majú spoločný aspoň jeden vrchol. Ak pri riešení využijete vetu z prednášky, dokážte ju.