

# UKTG skúška 3. termín

12. 6. 2024

## Úlohy 1, 2 a 3 odovzdajte na samostatnom papieri (papieroch)

**Úloha 1.** (14 bodov) Uvažujme slovo  $aaabbbcccc\dots zzz$ , ktoré obsahuje po tri znaky z každého z 26 písmen anglickej abecedy, pričom všetky jeho znaky sú usporiadané vzostupne. Koľko rôznych slov vieme získať, ak

- (2 b) ľubovoľne preusporiadame (spermutujeme) jeho písmená;
- (2 b) preusporiadame (spermutujeme) jeho písmená tak, aby výsledné slovo obsahovalo podslovo (súvislú podpostupnosť)  $cool$ ;
- (2 b) vymeníme pozície dvoch jeho písmen;
- (2 b) zmažeme niekoľko písmen zo začiatku a niekoľko písmen z konca slova (z rôznych strán môžeme zmazať rôzne počty písmen, niekoľko môže znamenať aj 0).
- (2 b) zmažeme zo slova ľubovoľný počet písmen (aj 0, aj všetky môžeme zmazať);
- (4 b) preusporiadame (spermutujeme) jeho písmená tak, aby sa vo výslednom slove nenachádzalo podslovo tvorené trojicou totožných písmen.

V úlohách d), e) pri mazaní písmen nemeníme poradie nezmazaných písmen a za korektnú možnosť počítame aj prázdne slovo vzniknuté zmazaním všetkých písmen. Pozor, pýtame sa na počet možných slov, nie na počet možností ako tieto slová dostať. Slovo považujeme za postupnosť znakov.

Vaše tvrdenia neformálne dokážte. Výsledok uveďte v čo najjednoduchšom tvare (to môže byť aj suma, ak sa už nedá zjednodušiť).

**Úloha 2.** (10 bodov) Sformulujte a dokážte frekvenčnú formu Dirichletovho princípu.

**Úloha 3.** (7 bodov) Majme množinu  $M = \{0, 1, \dots, 9\}$ . Nech  $G$  je graf, ktorého vrcholy sú všetky usporiadané dvojice množiny  $M \times M$ . Hranou sú spojené práve tie usporiadané dvojice, ktoré sa zhodujú v práve jednej súradnici. Rozhodnite, či je graf  $G$  Eulerovský. Vaše tvrdenie dokážte.

---

## Úlohy 4, 5 a 6 odovzdajte na samostatnom papieri (papieroch)

**Úloha 4.** (7 bodov) V závislosti od prirodzeného čísla  $n$  vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}.$$

**Úloha 5.** (7 bodov) Rozhodnite, či platí

- a)  $n^{n+1} = \Theta(n^n)$ ,                      b)  $2^{n-1} - 16 = \Theta(2^n)$ ,                      c)  $2^{n-1} - 16 \sim 2^n$ .

Vaše tvrdenia dokážte, pričom vychádzajte len z definícií. Nemôžete sa bez dôkazu odvolať na tvrdenia o asymptotických odhadoch.

**Úloha 6.** (5 bodov) Definujte pojmy: súvislý graf, komponent súvislosti, sled, ťah, Eulerovský ťah.