Cvičenie 2B: Metódy dôkazov

Úloha 2B.1. Dokážte alebo vyvráťte nasledovné tvrdenia:

a) $\sqrt{3}$ je iracionálne číslo.

b) $(\forall n \in \mathbb{N})(7 \nmid 42n \Rightarrow 7 \nmid n)$

c) $(\forall x,\, y \in \mathbb{R}_0^+)\left(\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\right)$

d) Dokážte, že ak súčin dvoch reálnych čísel x a y je iracionálne číslo, musí byť aspoň jedno z čísel x a y iracionálne.

e) $(\forall a,\, b \in \mathbb{N})[(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a+b)]$

f) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

g) $(\forall n \in \mathbb{N})(5 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 10 \nmid n)$

h) Ak prirodzené číslo n nie je deliteľné tromi, tak n^2 dáva po delení tromi zvyšok 1.

i) $(\forall a,\, b \in \mathbb{N})[(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$

j) Ak súčet reálnych čísel a, b, c, d, e je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.

k) Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\dfrac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\dfrac{a-b}{a+b}$.

l) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.

m) $(\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+)\left(\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right)$

Úloha 2B.2. Vysvetlite, prečo je nasledovný „dôkaz“ tvrdenia chybný:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &> \sqrt{3}, && \mid -\sqrt{3} \\
\sqrt{2} - \sqrt{3} &> 0, && \mid^2 \\
2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 &> 0, && \mid +2 \cdot \sqrt{6} \\
5 &> 2 \cdot \sqrt{6}, && \mid^2 \\
25 &> 24,
\end{aligned}$$

a to je pravda. Preto platí $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Úloha 2B.3. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie:

a) $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)a(x)$

b) $(\exists x)a(x) \Rightarrow (\forall x)a(x)$

c) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

d) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)) \Rightarrow (\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

e) $(\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x))$

f) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x)) \Rightarrow (\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

Úlohy na ďalšie precvičovanie

Vo všetkých úlohách chceme od vás úplné riešenie. Teda aj keď úloha je formulovaná „Rozhodnite...“, tak v riešení uveďte dôkaz vášho tvrdenia.

Úloha 2B.4. Dokážte, že platí:

a) $\sqrt{9-\sqrt{10}} < \sqrt{9+\sqrt{10}} - 1$

b) $\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

c) $\sqrt{4} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{12}$

d) $\sqrt{60} + \sqrt{\sqrt{47} - \sqrt{46}} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

Úloha 2B.5. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 2B.6. Dokážte, že ak e (eulerova konštanta) nie je riešením polynomiálnej rovnice s celočíselnými koeficientmi, tak ani $2e$ nie je.

Úloha 2B.7. O čísle π vieme, že je iracionálne. Dokážte, že číslo

$$\frac{47}{\sqrt[3]{\pi} + 42}$$

je tiež iracionálne.

Úloha 2B.8. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je $\sqrt{p}$ iracionálne číslo.

Úloha 2B.9. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?

Úloha 2B.10. Dokážte, že ak $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Úloha 2B.11. Dokážte, že pre každé celé čísla x, y platí

$$31 \mid 6x + 11y \Leftrightarrow 31 \mid x + y.$$

Úloha 2B.12. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 2B.13. Rozhodnite o platnosti nasledovných výrokov:

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}))$

b) $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(47n^5 + 42n^3 + 17n^2 - 9 \leq nc^5)$

c) $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(n^2 + 47 \leq cn)$

d) $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq K \Rightarrow x^7 - 50x^6 - 47x^5 - 42x^3 - 17x^2 + 18x - 9 \geq 0)$

Pri riešení nevyužívajte vysokoškolskú matematiku (limity, derivácie, ...).

Úloha 2B.14. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo 2 najväčším spoločným deliteľom čísel $2n + 6$, $4n + 10$.