Cvičenie 3A: Matematická indukcia

→ **Úloha 3A.1.** Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ďalšie úlohy na dokazovanie súčtov nájdete v `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/udds/zbierka.pdf`, str. 10. (Tých sa netýka možnosť odovzdať do Teamsov.)

→ **Úloha 3A.2.** Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo t je číslo $8^t + 6$ deliteľné siedmimi.

→ **Úloha 3A.3.** Nech $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. Pre $k \geq 2$ položme $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (tzv. Fibonacciho postupnosť). Dokážte, že pre ľubovoľné prirodené číslo k platí

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1.$$

Úloha 3A.4. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

→ a) $2^n \geq n - 2$, d) $2n < 3^n$, g) $3^n < n!$,

→ b) $n^2 \leq 2^n$. e) $3^n + 4^n \geq 5^n$,

c) $n! > 2^n$, f) $2^n \geq 20n$, h) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

→ **Úloha 3A.5.** Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí

$$1! + 2! + 3! + \cdots + n! < \frac{(n+1)!}{n-1}.$$

→ **Úloha 3A.6.** Zistite koľko najviac priesečníkov môže mať n priamok v rovine. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 3A.7. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

a) $3 \mid n^3 - n$,

b) $5 \mid n^5 - n$,

c) $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$,

d) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Úloha 3A.8. Dokážte, že pre ľubovoľných n reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, z ktorých je každé aspoň 1 platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n - 1 + a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Úloha 3A.9. V rovine je rozmiestnených n kružníc, z ktorých každá pretína všetky ostatné. Dokážte, že oblasti roviny, ktoré tieto kružnice vyčleňujú, možno ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadne dve susedné oblasti nemali rovnakú farbu. Oblasti, ktoré majú spoločné len niektoré body, nepovažujeme za susedné.

Úloha 3A.10. Zistite na koľko najviac častí môže n kružníc deliť rovinu. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 3A.11. Na stole máme v rade n mincí zľava doprava, ktoré môžu byť ľubovoľne otočené (buď lícom nadol, alebo nahor). V jednom ťahu môžeme zobrať niekoľko prvých mincí zľava a každú z nich otočiť. Dokážte, že môžeme naše ťahy voliť tak, aby sme po nejakom čase mali všetky mince otočené lícom nahor.

Úloha 3A.12. V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované -1, -2, -3, ..., pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.

Úloha 3A.13. *Hanojské veže* je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a n diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť najvrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže. Po celý čas musíme dodržať pravidlo, že väčší disk nemôže byť položený na menší disk. Cieľom hlavolamu je presunúť všetky disky z jednej tyče na druhú tyč. Dokážte, že tento hlavolam možno vyriešiť pomocou $2^n - 1$ ťahov.

Úloha 3A.14. Dokážte, že políčka tabuľky $2^n \times 2^n$ možno zafarbiť bielou a čiernou farbou tak, že keď si zoberieme ľubovoľné dva riadky, tak sa budú na polovici miest zhodovať a na zvyšnej polovici miest líšiť.

Úloha 3A.15. Nech $A \subseteq \mathbb{N}$ je ľubovoľná konečná množina prirodzených čísel, pre ktorú platí $|A| = n$. Označme

$$S(A) = \{x + y \mid x \in A;\ y \in A\}.$$

Dokážte, že $|S(A)| \geq 2n - 1$.

Úloha 3A.16. (*) Nech $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sú ľubovoľné konečné množiny prirodzených čísel také, že $|A| = m \geq 1$ a $|B| = n \geq 1$. Označme

$$A + B = \{a + b \mid a \in A;\ b \in B\}.$$

Dokážte, že potom

$$|A + B| \geq m + n - 1$$

a ukážte, že tento dolný odhad je tesný[1] pre všetky $m, n \geq 1$.

Úloha 3A.17. (*) Pod *rozlomením* obdĺžnikovej tabuľky čokolády rozumieme jej rozdelenie (pozdĺž priamky, ktorá prechádza hranami medzi štvorčekmi) na dve obdĺžníkové tabuľky, ktoré dohromady obsahujú rovnaký počet štvorčekov ako pôvodná tabuľka. Dokážte, že každú obdĺžnikovú tabuľku čokolády rozmerov $m \times b$ štvorčekov ($m, n \in \mathbb{N}^+$ možno rozdeliť na jednotlivé štvorčeky pomocou $n - 1$ rozlomení.

Úloha 3A.18. (*) Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel x_1, x_2, ..., x_n so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Úloha 3A.19. (*) Turnaja sa zúčastnilo n tímov. Každá (neusporiadaná) dvojica tímov odohrala práve jeden zápas. Každý zápas sa skončil výhrou niektorého tímu. Dokáže, že tímy možno zoradiť do postupnosti t_1, t_2, ..., t_n tak, že tím t_1 vyhral nad tímom t_2, tím t_2 nad t_3 a tak ďalej až tím t_{n-1} vyhral nad tímom t_n.

Úloha 3A.20. (*) Nech x je reálne číslo a $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokážte, že potom aj $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pre všetky prirodzené čísla n.

Úloha 3A.21. (*) Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b existujú celé čísla k, l také, že

$$\mathrm{NSD}(a, b) = ka + lb.$$

Nápoveda. Môžete využiť (bez dôkazu), že $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b, a - b)$.

[1] K ľubovoľnej dvojici prirodzených čísel $m, n \geq 1$ teda existujú konečné množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ také, že $|A| = m$, $|B| = n$ a $|A + B| = n + m - 1$.