Cvičenie 4A: Dirichletov princíp

Dirichletov princíp vo svojej základnej verzii vyjadruje jednoduché pozorovanie, že po priradení n objektov do $m < n$ priečinkov bude aspoň jeden priečinok obsahovať aspoň dva objekty. Ak teda napríklad n holubov rozmiestnime do m holubníkov a $m < n$, tak aspoň v jednom holubníku musia byť najmenej dva holuby (preto je niekedy reč aj o *holubníkovom princípe*, angl. *Pigeonhole principle*).

Množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$ tvoria *slabý rozklad* množiny B, ak Priradenie n objektov do m priečinkov možno sformalizovať ako zobrazenie $f : A \to B$ medzi konečnými množinami A a B takými, že $|A| = n$ a $|B| = m$. Základná verzia Dirichletovho princípu potom hovorí, že ak $m < n$, tak takéto zobrazenie nemôže byť injektívne.

Veta 1 (Dirichletov princíp)**.** *Nech B je konečná množina veľkosti m a pre n množín $A_1, A_2, \dots, A_n$ platí $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = B$. Ak $m > n$, tak existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ také, že $|A_i| \geq 2$.*

→ **Úloha 4A.1.** Majme 101 (nie nutne rôznych) trojciferných prirodzených čísel. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dve, ktoré sa zhodujú v posledných dvoch cifrách (dekadického zápisu).

Úloha 4A.2. Predpokladajme, že Bratislava má 419678 obyvateľov, z ktorých žiaden nemá viac ako 1000 rokov. Dokážte, že aspoň dvaja Bratislavčania sa narodili v rovnaký deň rovnakého roku.

→ **Úloha 4A.3.** Majme štyri (nie nutne rôzne) prirodzené čísla a_1, a_2, a_3, a_4. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu čísel a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $4 \mid a_i - a_j$.

Úloha 4A.4. Majme $n + 1$ (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $n \mid a_i - a_j$.

→ **Úloha 4A.5.** Majme 52 prirodzených čísel $a_1, \dots, a_{52}$, ktorých zvyšky po delení číslom 100 sú po dvoch rôzne. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $100 \mid a_i + a_j$.

Úloha 4A.6. Majme 52 (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, \dots, a_{52}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $100 \mid a_i + a_j$ alebo $100 \mid a_i - a_j$.

Úloha 4A.7. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Z množiny $\{1, \dots, 2n\}$ vyberme ľubovoľných $n + 1$ (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, ktoré majú rozdiel 1.

Úloha 4A.8. Majme $2^{n-4} + 1$ n-bitových binárnych vektorov (teda postupností núl a jednotiek). Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dva, ktoré sa líšia v najviac štyroch bitoch.

Úloha 4A.9. Vo vnútri rovnostranného trojuholníka o strane dĺžky 2 sa nachádza päť bodov. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu bodov, ktoré sú od seba vo vzdialenosti nanajvýš 1.

Úloha 4A.10. Vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu, no najviac tri ovce. Medveď zje každý deň aspoň štyri ovce, no najviac sedem oviec. Dokážte, že v každom týždni existujú dva dni, keď bača utrpí rovnakú škodu.

Úloha 4A.11. Počas deviatich kalendárnych týždňov zje vlk každý deň aspoň jednu ovcu, no v každom z deviatich kalendárnych týždňov zje najviac 12 oviec. Dokážte, že existuje úsek po sebe idúcich dní, počas ktorého zje vlk presne 15 oviec.

Úloha 4A.12. Desať ľudí si posadalo za okrúhly stôl. Každý z nich dostal raňajky so svojou menovkou. Potom sa všetci postavili a náhodne sa presadili tak, aby nikto nesedel pred svojimi raňajkami.

→ a) Dokážte, že vieme vždy otočiť stôl tak, že aspoň dvaja budú mať pred sebou svoje jedlo.

→ b) Vieme vždy otočiť stôl tak, že aspoň traja budú mať pred sebou svoje jedlo?

c) Vyriešte úlohy a), b) pre prípad, keď za stolom je 11 ľudí.

V šachových úlohách budeme hovoriť, že dve figúrky sa ohrozujú práve vtedy, keď jedna z nich vie urobiť ťah na pozíciu obsadenú druhou z nich. Farby figúriek nás nezaujímajú, pokiaľ nie je napísané inak.

→ **Úloha 4A.13.** Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

Úloha 4A.14. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

→ **Úloha 4A.15.** Koľko najviac veží možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?

Úloha 4A.16. Koľko najviac strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 4A.17. Koľko najviac kráľov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 4A.18. Koľko najviac dám možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

→ **Úloha 4A.19.** Koľko najviac koňov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 4A.20. Koľko najviac bielych pešiakov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali (za predpokladu, že biely pešiak môže stáť aj v ôsmom rade)?

Úloha 4A.21. *Špecializovaný strelec-expert* je šachová figúrka, ktorá sa môže hýbať iba po diagonálach rovnobežných s diagonálou `a1-h8`. Prípustné sú teda práve všetky ťahy po diagonále v smere „doprava hore“ alebo „doľava dole“. Koľko najviac špecializovaných strelcov-expertov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 4A.22. *Prehnane iniciatívny strelec* je šachová figúrka, ktorej jeden ťah pozostáva z ľubovoľného nenulového počtu ťahov bežného strelca. Koľko najviac prehnane iniciatívnych strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

→ **Úloha 4A.23.** Koľko najmenej čísel musíme vybrať z množiny $\{1, \dots, 20\}$, aby medzi vybranými číslami zaručene existovali dve, z ktorých jedno delí to druhé?

Veta 2 (Frekvenčná froma Dirichletovho princípu)**.** *Nech B je konečná množina veľkosti m a pre n množín $A_1, A_2, \dots, A_n$ platí $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = B$. Ak $n/m > r - 1$, tak existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ také, že $|A_i| \geq r$.*

Úloha 4A.24. Dokážte, že pri devätnástich hodoch hracou kockou musí aspoň štyrikrát padnúť rovnaké číslo.

→ **Úloha 4A.25.** Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

Úloha 4A.26. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

→ **Úloha 4A.27.** Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia 33 veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať päť veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice ostránime zvyšné nevybrané veže.

Úloha 4A.28. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia $k \in \{0, 1, \dots, 64\}$ veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať $\lceil k/8 \rceil$ veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice ostránime zvyšné nevybrané veže.

Úloha 4A.29. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia deviatich strelcov na (štandardnej) šachovnici možno vybrať dvoch strelcov tak, aby sa neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice ostránime zvyšných nevybraných strelcov. Nájdite vhodné zovšeobecnenie tohto tvrdenia pre $k \in \{0, 1, \ldots, 64\}$ strelcov.

Úloha 4A.30. Koľko najmenej kráľov musíme umiestniť na (štandardnú) šachovnicu, aby zaručenie existovala pätica kráľov, z ktorých sa žiadni dvaja neohrozujú?

Úloha 4A.31. Ohodnoťte nasledovné dve riešenia úlohy 4A.19. Sú správne, správne s drobnými chybami alebo obsahujú principálne chyby?

1. riešenie. Kôň na bielom políčku šachovnice ohrozuje iba čierne políčka a kôň na čiernom políčku ohrozuje iba biele políčka. Preto keď umiestnime 32 koňov na biele políčka, tak sa nebudú ohrozovať. Ak by sme umiestňovali 33 koňov, tak z Dirichletovho princípu by musel byť jeden kôň na čiernom políčku a ten by bol ohrozovaný. Preto najviac môžeme umiestniť 32 koňov.

2. riešenie. Vyskúšaním všetkých možností zistíme, že na šachovnicu rozmerov 2×4 vieme umiestniť najviac 4 koňov. Celú šachovnicu 8×8 vieme rozdeliť na 8 oblastí 2×4. Už vieme, že v každej z nich môže byť najviac 8 políčok. Preto na celej šachovnici môže byť najviac $8 \cdot 4 = 32$ koňov. Preto najviac môžeme umiestniť 32 koňov.

Ako riešiť a ako spísať riešenie

Najviac priamočiare použitie Dirichletovho princípu vyzerá zhruba takto:

1. Prečítame si zadanie a zistíme, koľko prvkov máme nájsť a s akou vlastnosťou. Prvky budú naše holuby.
2. Odhadneme, koľko holubníkov (množín) chceme mať, (formálne veľkosť množiny, do ktorej budeme definovať zobrazenie).
3. Pokiaľ v zadaní vyberáme niekoľko prvkov z nejakej množiny (čísla, políčka zo šachovnice), rozdelíme východziu množinu na niekoľko množín – holubníkov. Pre každú z týchto množín musí platiť, že ľubovoľné dva prvky z nej musia mať hľadanú vlastnosť. Rozdelenie hľadáme skúšaním, kreslením, ako by to mohlo vyzerať, čo by množiny mohli obsahovať.
4. Spíšeme riešenie.

Samozrejme, sú úlohy, napr. úloha o súvislej podpostupnosti z prednášky, v ktorých treba použiť Dirichletov princíp viac sofistikovane a na prvý pohľad nie je jasné, čo budú holuby a čo holubníky.

Riešenie úlohy 4A.23 Ukážeme, že riešením úlohy je 11.

Ukážeme, že menej ako 11 čísel nám vybrať nestačí – vtedy totiž vyberieme čísla $2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ (alebo ich podmnožinu). Vidíme, že žiadne dve z týchto čísel sa nedelia.

Ukážeme, že ak vyberieme aspoň 11, tak sú medzi nimi dve, z ktorých jedno delí druhé. Rozložme si množinu $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ nasledovne (na 10 holubníkov):

$M_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $M_5 = \{9, 18\}$, $M_9 = \{17\}$,
$M_2 = \{3, 6, 12\}$, $M_6 = \{11\}$, $M_{10} = \{19\}$.
$M_3 = \{5, 10, 20\}$, $M_7 = \{13\}$,
$M_4 = \{7, 14\}$, $M_8 = \{15\}$,

Vidíme[1], že ak z ľubovoľnej množiny M_i vyberieme dva prvky, tak jeden bude deliť druhý. Keďže z množiny M vyberáme aspoň 11 čísel, ale máme iba 10 množín (čo je menej), tak z Dirichletovho princípu musíme vybrať dve čísla a, b z tej istej množiny M_i. Vďaka našej voľbe množín M_i pre tieto dve čísla a, b platí, že jedno delí druhé. Tým sme dokázali, čo sme mali. □

Viac formálny záver Nech B označuje m-prvkovú množinu vybraných čísel ($m > 11$). Uvažujme teraz pre $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ množiny $A_i = M_i \cap B$. Pre tieto množiny platí

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (M_1 \cap B) \cup (M_2 \cap B) \cup \cdots \cup (M_{10} \cap B) = (M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{10}) \cap B = \{1, 2, \ldots, 20\} \cap B = B.$$

Preto podľa dirichletovho pricnípu existuje $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ také, že A_i obsahuje aspoň dva prvky, označme ich a, b. Keďže a, b patria do M_i, tak jedno delí druhé.