Cvičenie 4B: Opakovanie

Matematická indukcia

Úloha 4B.1. Dokážte, že pre všetky celé čísla $n > 1$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Úloha 4B.2. Na stole máme v rade n mincí zľava doprava, ktoré môžu byť ľubovoľne otočené (buď lícom nadol, alebo nahor). V jednom ťahu môžeme zobrať niekoľko prvých mincí zľava a každú z nich otočiť. Dokážte, že môžeme naše ťahy voliť tak, aby sme po nejakom čase mali všetky mince otočené lícom nahor.

Úloha 4B.3. V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované -1, -2, -3, $\ldots$, pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.

Úloha 4B.4. *Hanojské veže* je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a n diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť najvrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže. Po celý čas musíme dodržať pravidlo, že väčší disk nemôže byť položený na menší disk. Cieľom hlavolamu je presunúť všetky disky z jednej tyče na druhú tyč. Dokážte, že tento hlavolam možno vyriešiť pomocou $2^n - 1$ ťahov.

Dirichletov princíp

Úloha 4B.5. Koľko najviac koňov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 4B.6. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia 17 strelcov na (štandardnej) šachovnici možno vybrať dvoch strelcov tak, aby sa neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice odstránime zvyšných nevybraných strelcov.

Úloha 4B.7. Nájdite najmenšie také číslo k pre ktoré platí, že v každej k-prvkovej podmnožine množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$ sa nachádzajú tri čísla, ktoré majú spoločnú cifru (spoločná cifra musí byť rovnaká pre všetky tri, ale môže v nich byť na rôznych pozíciách, napr. čísla 12, 31 a 17 majú spoločnú cifru 1, ale čísla 42, 47 a 27 nemajú spoločnú cifru). Vaše tvrdenie dokážte.