

Cvičenie 6B: Počítanie súm

Pri počítaní súm sa snažíme nájsť výraz s rovnakou hodnotou, akú má počítaná suma. Výsledný výraz nesmie obsahovať žiadnu sumu alebo súčin s premenným počtom členov. Aké metódy môžeme použiť na dokazovanie súm?

1. Vypočítať si niekoľko prvých členov, na základe nich si tipnúť výsledok a následne dokázať jeho správnosť (napr. matematickou indukciou). Veľa výsledkov je však takých, že nevidno dobre z nich, čo sú zač.
2. Použiť pri výpočte inú, už známu sumu. Často si to vyžaduje upraviť sumu do tvaru vhodného pre aplikáciu známej sumy. To často obnáša
 - použiť kombinatorické identity;
 - rozpísať si kombinačné čísla cez faktoriály a upraviť ich tak, aby sme dostali kombinačné číslo (čísla) vhodné pre sumáciu;
 - vyňatie konštanty pred sumu ($\sum c \cdot a_k = c \sum a_k$);
 - rozdelenie sumy na viac súm ($\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$);
 - substituovať premenné, upraviť tým sumačný rozsah.
3. Upraviť známu sumu obsahujúcu reálnu premennú x (napr. Binomickú vetu) do vhodného tvaru aplikovaním operácie ako sú derivácia alebo integrácia.
4. Nájsť kombinatorickú interpretáciu sumy (teda nejakú úlohu kde počet možností možno počítať riešenou sumou) a prísť k počtu možností iným, jednoduchším spôsobom. Teda ide o to, čo sme trénovali na cvičení 5, len s tým, že máme len jednu stranu rovnosti.

Pri používaní známych súm príde najviac vhod binomická veta.

Veta 1 (Binomická veta). *Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Môžete však používať aj iné známe sumy, napr. tie, čo sa uvádzajú v skriptách alebo v cvičení 5. Ak však používate sumu z cvičenia, ktorá nemá názov, tak súčasťou úplného riešenia by mal byť aj jej dôkaz. Keď používate sumu, ktorá je pomenovaná (napr. Cauchyho sčítací vzorec), uveďte jej názov – vtedy je vidno, že sa odvolávate na niečo známe a taktiež na aké presne tvrdenie sa odvolávate, teda nemusíte písať do riešenia aj dôkaz.

→ **Úloha 6B.1.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 6B.2.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} 3^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 6B.3.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 6B.4.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (3k + 1) \binom{n}{k}.$$

Úloha 6B.5. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k 2^k \binom{n}{k}.$$

Úloha 6B.6. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k(k-1) \binom{n}{k}.$$

Úloha 6B.7. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \binom{n}{k}.$$

→ Úloha 6B.8. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

→ Úloha 6B.9. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Úloha 6B.10. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k}.$$

Úloha 6B.11. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{4k}.$$

Úloha 6B.12. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{5k}.$$

Úloha 6B.13. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{4k}.$$

Úloha 6B.14. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{4k}.$$

Úloha 6B.15. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{n}{m-k}.$$

Úloha 6B.16. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{k!(n-k!)}.$$

Úloha 6B.17. Vypočítajte pre $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$:

$$\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{k}{2} (n-k)$$