

Cvičenie 8A: Princíp inklúzie a exklúzie

Veta 1 (Princíp zapojenia a vypojenia). *Nech $n \in \mathbb{N}$ a M_1, M_2, \dots, M_n sú konečné množiny. Potom*

$$\left| \bigcup_{i=1}^n M_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}} \left| \bigcap_{j=1}^k M_{i_j} \right|.$$

→ **Úloha 8A.1.** V autobuse je celkovo 102 cestujúcich. 49 z nich hovorí po francúzky, 34 po anglicky a 21 po nemecky. Siedmi ľudia ovládajú francúzštinu aj angličtinu, piati francúzštinu aj nemčinu a deväť angličtinu a nemčinu. Všetkými tromi jazykmi hovoria dvaja ľudia. Koľkí z cestujúcich nehovoria žiadnym z týchto troch jazykov? Koľko je takých ľudí, ktorí nehovoria po francúzky, ale za to ovládajú angličtinu alebo nemčinu?

Úloha 8A.2. Študenti sa mali podrobiť trom skúškam. Zo 124 študentov zložilo len prvú 22, prvú a druhú zložilo 28, druhú a tretiu 52, len druhú 12, prvú alebo tretiu (aspoň jednu z nich) 96, všetky tri 20, ani prvú ani druhú 30. Koľko študentov nespravilo ani jednu skúšku? Koľko ich ešte bude robiť jednotlivé skúšky?

Úloha 8A.3. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 5000\}$ je deliteľných aspoň jedným z čísel 2 a 3?

Úloha 8A.4. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 5000\}$ je deliteľných aspoň jedným z čísel 2, 3 a 5?

Úloha 8A.5. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 5000\}$ nie je deliteľných žiadnym z čísel 2, 3 a 7?

Úloha 8A.6. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 5000\}$ nie je druhou ani treťou mocninou žiadneho prirodzeného čísla?

→ **Úloha 8A.7.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) obsahujú aspoň jednu z postupností $(1, 2, 3)$ alebo $(4, 5, 6)$ ako súvislú podpostupnosť?

→ **Úloha 8A.8.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, ani $(42, 44, 8, 55)$?

→ **Úloha 8A.9.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré obsahujú aspoň jednu z postupností $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ alebo $(7, 8, 9)$ ako súvislú podpostupnosť?

→ **Úloha 8A.10.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, $(47, 17, 57)$ ani $(42, 44, 8, 100)$?

Úloha 8A.11. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, $(100, 1, 8)$, ani $(42, 44, 8, 55)$?

Úloha 8A.12. Vyriešte úlohy 8A.7 až 8A.11 pre prípad, že uvažované podpostupnosti nemusia byť súvislé.

→ **Úloha 8A.13.** Máme tri jedoeurové mince, štyri dvojeurové mince a päť trojeurových mincí. Koľkými spôsobmi z nich možno vybrať desať mincí?

Úloha 8A.14. Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22.$$

Koľko existuje celočíselných riešení tejto rovnice takých, že platí $0 \leq x_1 \leq 7$, $0 \leq x_2 \leq 11$, $0 \leq x_3 \leq 5$ a $0 \leq x_4 \leq 8$?

→ **Úloha 8A.15.** Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22.$$

Koľko existuje celočíselných riešení tejto rovnice takých, že platí $2 \leq x_1 \leq 7$, $-1 \leq x_2 \leq 8$, $0 \leq x_3 \leq 5$ a $-2 \leq x_4 \leq 9$?

Úloha 8A.16. Koľko prešmyčiek neobsahujúcich tri rovnaké písmená za sebou je možné vytvoriť zo slova ANTANANARIVO?

V nasledujúcich úlohách môžete vo výsledku uviesť jednu sumu.

→ **Úloha 8A.17.** Koľko existuje $2n$ -prvkových postupností, ktoré

- každé z čísel $1, 2, \dots, n$ obsahujú práve dvakrát a zároveň
- obsahujú aspoň na jednom mieste dve rovnaké čísla vedľa seba?

Úloha 8A.18. Koľkými spôsobmi možno v kine posadiť n manželských párov do poslednej rady, kde je $2n$ miest, tak, aby žiaden manželský pár nesedel vedľa seba?

Úloha 8A.19. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) neobsahujú súvislú podpostupnosť $(i, i + 1)$ pre $i \in \{1, \dots, 99\}$?

Úloha 8A.20. Koľko celočíselných riešení, takých že pre každé $i \in 1, 2, \dots, n$ platí $0 \leq x_i \leq 47$ má rovnica

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s?$$