

Cvičenie 9B: Relácie ekvivalencie a rozklady

→ **Úloha 9B.1.** Majme reláciu M z množiny $\{a, b, c, d\}$ do množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a reláciu N na množine $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ktoré máme zadané nasledovne:

$$M = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5)\},$$
$$N = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}.$$

Vypíšte relácie M^{-1} , N^{-1} , MN a NM (ak existujú).

→ **Úloha 9B.2.** Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna:

a) $V = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; 5 \mid (a - b)\}$.

→ **Úloha 9B.3.** Na množine študentov gymnázia definujeme reláciu „byť spolužiakom“. Dokážte, že ide o reláciu ekvivalencie. Čo je rozklad, ktorý určuje?

→ **Úloha 9B.4.** Dokážte, že relácia V z predošlej úlohy je reláciou ekvivalencie. Popíšte rozklad, ktorý indukuje

a) na množine $\{-10, -8, 1, 5, 16, 17, 20, 47, 49\}$,

b) na množine \mathbb{Z} .

Úloha 9B.5. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo d je relácia \equiv_d definovaná na \mathbb{Z} tak, že

$$a \equiv_d b \Leftrightarrow d \mid (a - b),$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

Poznámka. Táto relácia sa nazýva *kongruencia* a veľmi často sa využíva v teórii čísel. Dáva do vzťahu práve také čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení číslom d . Miesto značenia $a \equiv_d b$ sa skôr používa $a \equiv b \pmod{d}$ (čítame a je kongruentné s b modulo d). Teda napr. $2 \equiv 47 \pmod{5}$, $12 \equiv 0 \pmod{2}$, $22 \equiv 50 \pmod{7}$.

→ **Úloha 9B.6.** Dokážte, že relácia

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - y \in \mathbb{Z}\}$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

→ **Úloha 9B.7.** Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine?

Úloha 9B.8. Nech R a S sú relácie ekvivalencie na množine M . Uvažujme nasledovné relácie

a) $R \cup S$, b) $R \cap S$, c) $R - S$, d) RS , e) R^{-1} .

Pre každú z podúloh nájdite príklad relácií R , S kedy výsledná relácia je opäť reláciou ekvivalencie; a taktiež príklad relácií R , S , kedy výsledná relácia nie je reláciou ekvivalencie. V prípade, že také relácie R , S nemožno nájsť, dokážte prečo.

Úloha 9B.9. Nech R a S sú tranzitívne relácie. Čo viete povedať o tranzitívnosti relácií

- a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS , e) R^{-1} ?

Musia byť vždy tranzitívne? Môžu byť pre niektoré voľby R , S tranzitívne a inokedy nie? Nebudú nikdy tranzitívne?

Úloha 9B.10. Ktoré z relácií z úlohy ?? sú reláciami ekvivalencie? Aký rozklad určujú?

Úloha 9B.11. Nech W je neprázdny systém relácií ekvivalencie na množine X . Dokážte, že aj $\bigcap_{R \in W} R$ je relácia ekvivalencie na množine X .