Cvičenie 10A: Usporiadania

Úloha 10A.1. Uvažujme reláciu

$$R = \{(2,1),(3,1),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,5)\}$$

na množine $\{1,2,3,4,5,6\}$. Ide o reláciu usporiadania? Ak nie, ako ju treba upraviť, aby sme dostali usporiadanie? Ak máme usporiadanie, určte najväčšie, najmenšie, minimálne a maximálne prvky vzhľadom na toto usporiadanie.

Úloha 10A.2. Uveďte príklad relácie usporiadania, ktoré má 2 minimálne a 5 maximálnych prvkov.

Úloha 10A.3. Uveďte príklad relácie usporiadania, ktoré 3 minimálne a žiadne maximálne prvky.

Úloha 10A.4. Pre zadané nezáporné celé čísla m, n nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať n maximálnych a m minimálnych prvkov.

Úloha 10A.5. Pri každú z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, dichotomická. Určite, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním. Ak áno, určte ich minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

a) $R = \{(a,a);\ a \in \mathbb{N}\} \cup \{(2a+1, 2a);\ a \in \mathbb{N}\}$ (na $\mathbb{N}$),

b) $R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a \le c \wedge b \le d\}$,

c) $R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a+b \le c+d\}$,

d) $R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a+b < c+d\}$,

e) $R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a+b < c+d \vee (a,b) = (c,d)\}$,

f) Relácia z podúlohy f) zúžená na množinu $M = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2;\ a \ge 5 \wedge b \ge 7 \wedge a+b \le 47\}$

g) (*) $R = \{(A,B) \in \mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N});\ \sum_{a \in A} 2^a \le \sum_{b \in B} 2^b\}$, kde $\mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N})$ označuje množinu konečných podmnožín nezáporných celých čísel.

h) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 7a \mid b \vee a = b\}$

Úloha 10A.6. Možno na množine $\mathbb{N}^2$ definovať úplné usporiadanie?

Úloha 10A.7. Z množiny čísel $M = \{1,2,\ldots,30\}$ si vyberáme nejaké podmnožiny tak, aby každé dve vybrané čísla boli nesúdeliteľné. Všetky takéto podmnožiny dáme do množiny $\mathcal{N}$. Teda

$$\mathcal{N} = \{X \subseteq M;\ \forall a,b \in X\colon\ \mathrm{NSD}(a,b) = 1\}.$$

a) Určte maximálne prvky množiny $\mathcal{N}$ vzhľadom na usporiadanie $\subseteq$. Existuje najväčší prvok?

b) Je pravda, že všetky tieto maximálne prvky majú rovnaký počet prvkov?

c) Určte maximálne prvky vzhľadom na ostré usporiadanie $\prec$ „mať viac prvkov ako“. Teda $A \preceq B \Leftrightarrow A = B \vee |A| < |B|$. Existuje najväčší prvok?

d) Koľko najviac čísel možno vybrať z množiny M tak, aby každé dve z vybraných čísel boli nesúdeliteľné?