Cvičenie 10B: Usporiadania II

→ **Úloha 10B.1.** Pre neprázdnu množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ označuje $\max A$ najväčší prvok množiny A (vzhľadom na klasické usporiadanie $\leq$). Nech $M = \{n \in \mathbb{N};\ 0 \leq n \leq 47\}$ a nech

$$R = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\});\ \max A < \max B \vee A = B\}.$$

Dokážte, že R je usporiadaním na množine $\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}$ a nájdite všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich nájdených prvkov dokážte.

→ **Úloha 10B.2.** Nájdite príklad upsoriadaní R a S na rovnakej neprázdnej množine M, aby relácie

a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}?

boli / neboli usporiadania. V prípade, že taká voľba R, S neexistuje, dokážte to.

Úloha 10B.3. Nech R je usporiadanie na množine A a S je usporiadanie na množine B. Rozhodnite, či sú naslednové relácie usporiadaním:

a) relácia T na množine $A \times B$, kde $(a, b)T(c, d) \Leftrightarrow aRc \wedge bSd$,

b) relácia U na množine $A \times B$, kde $(a, b)U(c, d) \Leftrightarrow aRc \vee bSd$,

Úloha 10B.4. Nech A, $I \neq \emptyset$ sú množiny a nech pre každé $i \in I$ je φ_i usporiadanie množiny A. Dokážte, že potom aj $\bigcap_{i \in I} \varphi_i$ je usporiadanie množiny A. Čo ak sú φ_i úplné usporiadania?

Poznámka. $\bigcap_{i \in I} \varphi_i = \{x;\ (\forall i \in I)(x \in \varphi_i)\}$

Úloha 10B.5. Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna, asymetrická a antisymetrická:

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle -1, 1\rangle\}$

→ b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 + 4y^2 < 4xy\}$

→ c) Relácia U na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in U \Leftrightarrow 47 \in x \cap y$.

d) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ac = bd$

e) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

f) $| = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(b = k \cdot a)\}$

g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ \sin x = \sin y\}$

h) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 7 \mid a + b\}$

i) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \mathbb{Z}$.

j) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cup y = \mathbb{Z}$.

k) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$.

l) Relácia P na $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, taká že $(A, B) \in P \Leftrightarrow |A| = |B|$, kde $|M|$ označuje počet prvkov (konečnej) množiny M.

m) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ c - d = 4\}$

n) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (cd + 100)(cd - 60) = 0\}$

o) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |x + y||x - y| \leq 3\}$

p) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (|a + b| - 24)(|a - b| - 24) = 0\}$

q) $S = \{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$

r) $T = \{(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$

s) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle 0, 1\rangle\}$

t) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 = 2y^2\}$

u) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x = 2^y$

v) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 100$

w) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.

x) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

y) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow 3 \mid x^2 + y^2$