

## Cvičenie 12A: Mohutnosti množín

**Úloha 11A.1.** Pre nasledovné množiny určte, či sú spočítateľné. Je ich mohutnosť rovná  $|\mathbb{N}|$  alebo  $|\mathbb{R}|$ ?

- a)  $\mathbb{R}$
- b)  $\mathbb{R}^+$
- c)  $(3, 5)$
- d)  $(3, 5)$
- e) množina všetkých konečných podmnožín prirodzených čísel
- f) množina všetkých podmnožín prirodzených čísel
- g) množina všetkých konečných postupností prirodzených čísel
- h) množina všetkých nekonečných postupností prirodzených čísel
  - i) množina všetkých nekonečných nerastúcich postupností prirodzených čísel
  - j) množina všetkých nekonečných neklesajúcich postupností prirodzených čísel
- k) množina všetkých injekcií  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- l) množina všetkých surjekcií  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- m) množina všetkých bijekcií  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- n) množina všetkých slov (teda konečných postupností) pozostávajúcich z malých písmen anglickej abecedy a  $\mathbb{N}$
- o) množina všetkých programov napísaných v Pythone
- p) množina všetkých problémov v informatike (v tejto úlohe si treba nejako rozumne definovať, čo je to problém)
- q) (\*) ľubovoľná množina disjunktných otvorených intervalov

**Úloha 11A.2.** Dokážte, že všetky intervaly  $(a, \infty)$ , kde  $a$  je reálne číslo, majú rovnakú mohutnosť.

**Úloha 11A.3.** Nech  $M$  je množina všetkých matíc stupňa 2, tvaru  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , kde  $a, b \in \mathbb{N}$ . Dokážte, že  $M$  je spočítateľná.

**Úloha 11A.4.** Porovnajete mohutnosti množín

- a)  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ ,
- b)  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  a  $\mathbb{R}$
- c)  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (množina všetkých zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ ) a  $\mathbb{R}$
- d)  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  a  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- e) množina všetkých rastúcich funkcií  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a množina všetkých klesajúcich funkcií  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- f) množina všetkých rastúcich funkcií  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a  $(\mathbb{R})$

**Úloha 11A.5.** Nech  $A$  a  $B$  sú množiny. Platí nasledovné tvrdenie? Injekcia z  $A$  do  $B$  existuje práve vtedy, keď existuje surjekcia z  $B$  do  $A$ .