Cvičenie 13A: Súvislosť a bipartitné grafy

→ **Úloha 13A.1.** Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n-1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.

Úloha 13A.2. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov u, v platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$. Dokážte, že G musí byť nutne súvislý.

→ **Úloha 13A.3.** Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

b) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

c) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj ťah začínajúci v u a končiaci vo v.

d) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

e) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

→ **Úloha 13A.4.** Podľa riešenia predošlej úlohy navrhnite funkciu v Pythone, ktorá dostane ako parameter u-v-sled a vypíše na výstup u-v-cestu.

→ **Úloha 13A.5.** Dokážte, že pre každý bipartitný 3-regulárny graf s partíciami A, B platí $|A| = |B|$.

→ **Úloha 13A.6.** Nech G je súvislý bipartitný 3-regulárny graf. Dokážte, že ak z grafu G odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

Úloha 13A.7. Nech G je súvislý bipartitný 3-regulárny graf. Dokážte, že ak z grafu G odstránime ľubovoľnú hranu, tak ostane súvislý.

→ **Úloha 13A.8.** Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý. (Komplementárny graf grafu G je taký graf G', pre ktorý platí $V(G') = V(G)$ a $E(G') = \binom{V}{2} - E(G)$.)

→ **Úloha 13A.9.** Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?

Úloha 13A.10. Dokážte, že ak graf $G = (V, E)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

Úloha 13A.11. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.

Úloha 13A.12. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.

Úloha 13A.13. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.

Úloha 13A.14. Na ľavom brehu rieky stojí prievozník a má na svojej lodičke previezť cez rieku kozu, vlka a seno. Loďka je malá a okrem prievozníka sa do nej vôjde len jeden z uvedených troch pasažierov. Môže prievozník postupne dopraviť cez rieku kozu, vlka i seno, ak nesmie ponechať osamote na brehu ani vlka s kozou ani kozu so senom? Ako sa zmení úloha, ak má prievozník dopraviť cez rieku

1. ešte jednu kozu;
2. ešte jedného vlka?

Úloha 13A.15. Pre kladné celé číslo n uvažujme graf Q_n, ktorého vrcholy tvoria všetky n-členné postupnosti núl a jednotiek. Hranami sú spojené tie postupnosti, ktoré sa líšia práve v jednej pozícii (teda napr. $\{0110, 0100\} \in E(Q_4)$, ale $\{0110, 0101\} \notin E(Q_4)$). V závislosti od čísla n určte:

a) Koľko hrán má graf Q_n?

b) Je graf Q_n súvislý?

c) Je graf Q_n bipartitný?

d) Určte dĺžku najkratšej kružnice grafu Q_n.

e) Určte dĺžku najdlhšej kružnice grafu Q_n.

f) Nájdite najmenšie také číslo d, že medzi každými dvoma vrcholmi grafu Q_n existuje cesta dĺžky najviac d.

Úloha 13A.16. Dokážte, že vrcholy každého grafu G, ktorého minimálny stupeň je aspoň 1, možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý vrchol má suseda v druhej skupine ako je on sám.

Úloha 13A.17. Na večierku sa stretlo $3n - 1$ ľudí, $n \in \mathbb{N}^+$. Niektoré dvojice ľudí sa medzi sebou poznajú (vzťah poznať sa je symetrický). Dokážte, že v každej takejto situácii existuje n navzájom disjunktných párov s vlastnosťou, že buď sa všetky páry medzi sebou poznajú, alebo sa žiaden z párov medzi sebou nepozná.