1. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **štvrtok 13. 10., 12:00**

Úloha 1. *(1 bod)* Znegujte zložený výrok

$$[(A \wedge \neg B) \vee (C \Rightarrow \neg A)] \Rightarrow [(\neg B \Rightarrow D) \wedge (\neg E \vee C)].$$

Riešenie

$$\begin{aligned}
&\neg[[(A \wedge \neg B) \vee (C \Rightarrow \neg A)] \Rightarrow [(\neg B \Rightarrow D) \wedge (\neg E \vee C)]] \Leftrightarrow && \text{(negácia implikácie)}\\
&\Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (C \Rightarrow \neg A)] \wedge \neg[(\neg B \Rightarrow D) \wedge (\neg E \vee C)] \Leftrightarrow && \text{(negácia konjunkcie)}\\
&\Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (C \Rightarrow \neg A)] \wedge [\neg(\neg B \Rightarrow D) \vee \neg(\neg E \vee C)] \Leftrightarrow && \text{(negácia implikácie a disjunkcie)}\\
&\Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (C \Rightarrow \neg A)] \wedge [(\neg B \wedge \neg D) \vee (E \wedge \neg C)] \Leftrightarrow &&\\
&\Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (C \Rightarrow \neg A)] \wedge (\neg B \wedge \neg D) \vee (E \wedge \neg C) &&
\end{aligned}$$

Poznámka. Do riešenia stačí len napísať posledný alebo predposledný riadok. V poslednom sme len odstránili jedny zbytočné zátvorky.

Úloha 2. *(1 bod)* Nájdite taký príklad množiny M a výrokových foriem $a(x)$ a $b(x)$, aby po ich dosadení do výroku

$$(\forall x \in M)\,[a(x) \Rightarrow (\exists y \in M)b(y)] \Rightarrow (\forall x \in M)(a(x) \Rightarrow b(x))$$

sme dostali a) pravdivý, b) nepravdivý výrok. Správnosť vašich volieb zdôvodnite.

Komentár

Na túto úlohu sa dalo ísť rôznymi spôsobmi. Aj skúšaním, aj robením úvah, ako jednotlivé výrokové formy musia vyzerať. V podúlohe a) sa dala pravdivosť dosiahnuť viacerými jednoduchými spôsobmi ako dostanie nepravdivého výroku na ľavej strane implikácie alebo pravdivého na pravej strane. V podúlohe b) sme nemali navýber a museli sme dostať $1 \Rightarrow 0$.

Najväčším problémom bolo zdôvodnenie, prečo je výsledný výrok pravdivý alebo nepravdivý. Toto zdôvonenie bolo rôzne náročné, v závislosti od toho, ako ste si zvolili M, a, b. V ňom bolo treba vysvetliť pravdivosť všetkých potrebných zložiek.

Riešenie

a) Zvolíme $M = \mathbb{Z}$, $a(x) \Leftrightarrow 4 \mid x$ a $b(x) \Leftrightarrow 2 \mid x$, čím dostávame výrok

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\,[4 \mid x \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})2 \mid y] \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z})(4 \mid x \Rightarrow 2 \mid x)$$

Na pravej starne máme výrok $(\forall x \in \mathbb{Z})(4 \mid x \Rightarrow 2 \mid x)$, ktorý je pravdivý pre všetky $x \in \mathbb{Z}$, lebo každé číslo deliteľné 4-mi je deliteľné aj 2-mi. Preto je aj celá implikácia pravdivá.

b) Zvolíme $M = \mathbb{Z}$, $a(x) \Leftrightarrow 2 \mid x$ a $b(x) \Leftrightarrow 4 \mid x$, čím dostávame výrok

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\,[2 \mid x \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})4 \mid y] \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z})(2 \mid x \Rightarrow 4 \mid x)$$

Výrok $(\exists y \in \mathbb{Z})4 \mid y$ je pravdivý, vyhovuje $y = 4$, a to nezávisle na x. Preto pre každé $x \in \mathbb{Z}$ máme v implikácii $2 \mid x \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})4 \mid y$ na pravej strane pravdu, preto je výrok $(\forall x \in \mathbb{Z})\,[2 \mid x \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})4 \mid y]$ pravdivý. Na pravej starne implikácie však máme nepravdivý výrok $(\forall x \in \mathbb{Z})(2 \mid x \Rightarrow 4 \mid x)$, lebo $2 \mid 2$, ale 42. Celý výrok je teda nepravdivý.

Časté chyby

Okrem nedostatočných zdôvodnení sa objavili aj miskoncepcie o tom, ako možno voliť výrokové formy. Výroková forma $b(x)$ má len jednu premennú x. Nemôže sa v nej vyskytovať iná premenná. Teda napr. $b(x) \Leftrightarrow 2 \mid x+y$ nie je v poriadku. Taktiež, výroková forma sa volá b. Zápis $b(x)$ vyjadruje, že obsahuje jednu premennú, ktorú sme si pomenovali x. Ak zapíšeme $b(y)$, tak ide o tú istú vyrokovú formu, iba sme jej premennú iba pomenovali. Teda nemôžeme napísať $b(x) \Leftrightarrow 2 \mid x$ a $b(y) \Leftrightarrow 4 \mid x$. Čo by potom bolo $b(4)$, pravda alebo nepravda?

Úloha 3. *(1,5 boda)* Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí rovnosť

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

Riešenie

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 2$ dostávame $2 \cdot 2^2 = 8 = 8 = 1 \cdot 2^3$.

Indukčný krok. Uvažujme teraz $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Predpokladajme, že platí

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1}. \tag{IP}$$

Ekvivalentnými úpravami dokážeme, že platí

$$\begin{aligned}
\underbrace{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n}_{\text{IP}} + (n+1) \cdot 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2}\\
(n-1) \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2}\\
(n-1+n+1) \cdot 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2}\\
2n \cdot 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2}\\
n \cdot 2^{n+2} &= n \cdot 2^{n+2}
\end{aligned}$$

□

Úloha 4. *(1,5 boda)* Dokážte nasledovný výrok:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\left(7x + \frac{3}{y} < 4y + \frac{2}{x} \Rightarrow x < y\right).$$

Riešenie

Tvrdenie dokážeme nepriamo. Nech pre $x, y \in \mathbb{R}+$ platí $x \geq y$. Potom platí $7x \geq 7y$ a aj $7y \geq 4y$ (lebo $y > 0$), z čoho máme $7x \geq 4y$. Keďže x aj y sú kladné z $x \geq y$ vieme vydelením dostať $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{x}$. Potom platí $\frac{3}{y} \geq \frac{3}{x} \overset{x>0}{\geq} \frac{2}{x}$, teda $\frac{3}{y} \geq \frac{2}{x}$. Na záver z platnosti $7x \geq 4y$ a $\frac{3}{y} \geq \frac{2}{x}$ vyplýva, že $7x + \frac{3}{y} \geq 4y + \frac{2}{x}$. Tým sme dokázali, že

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\left(x \geq y \Rightarrow 7x + \frac{3}{y} \geq 4y + \frac{2}{x}\right),$$

čo je presne obmena dokazovaného výroku. $\square$